

*Alla memoria
di mio padre e di mia madre
Enea Moretto
Rina Fortunata Grando*

ISTITUTO ITALIANO PER GLI STUDI FILOSOFICI



ANTONIO MORETTO

Questioni di filosofia della matematica nella "Scienza della logica" di Hegel

"Die Lehre vom Sein" del 1831



193
M845
QUE

© by Verifiche - Trento 1988

Tutti i diritti sono riservati

PR - 001670695

Doação
Registro N° 693533
Questioni di filosofia della matematica nella "Sc
Moretto, Antonio
Bibliothèque d'histoire des scie
R\$ 18,00

Vorliegende Arbeit wurde in Rahmen des Forschungsprojektes: *Antike in der Moderne. Die Zenonischen Paradoxien: das mathematische Kontinuum und das Problem des Aktual-Unendlichen. Eine Rezeptions- und Wirkungsgeschichtliche Untersuchung* der STIFTUNG VOLKSWAGENWERK, Hannover, fertiggestellt.

INDICE DEL VOLUME

PREMESSA pag. 57

INTRODUZIONE pag. 9

CAPITOLO I

L'ASPETTO CONCETTUALE DELL'INFINITO
DELLA MATEMATICA pag. 15

1. Introduzione pag. 15

2. La cattiva infinità del progresso infinito e le sue
esemplificazioni matematiche pag. 16

3. Il vero infinito pag. 19

4. L'influsso del *Filebo* di Platone nella problemati-
ca hegeliana sull'infinito pag. 23

5. La grandezza infinitesima e la contraddizione.
L'influsso del *Parmenide* di Platone nella rifles-
sione hegeliana sull'*evanescente* pag. 30

6. Conclusione pag. 35

CAPITOLO II

IL LIMITI POSTI DAL METODO MATEMATICO
ALL'INTUIZIONE DELL'INFINITO. IL "CAL-
COLO DELLE FUNZIONI" DI LAGRANGE pag. 37

1. Introduzione pag. 37

2. Le serie infinite. Le approssimazioni infinite, le
scritture decimali illimitate pag. 38

3. Il metodo dei limiti	pag. 39
4. L'integrale secondo il metodo leibniziano	pag. 42
5. L'inadeguatezza del formalismo per rappresentare l'infinito	pag. 43
6. Il formalismo dell'infinitamente piccolo nel calcolo differenziale e nel calcolo integrale	pag. 45
7. Le categorie formali	pag. 47
8. Determinazioni numeriche e determinazioni di pensiero	pag. 50
9. Analisi superiore e metodo matematico	pag. 51
10. Il <i>calcolo delle funzioni</i> di Lagrange	pag. 55
11. Le considerazioni di Hegel sul calcolo delle funzioni	pag. 57
12. Conclusione	pag. 60
 CAPITOLO III	
L'INFINITO E IL RAPPORTO DISCRETO-CONTINUO	
1. Introduzione	pag. 63
2. La III Nota sull'infinito matematico	pag. 67
3. La misura dei continui in Cavalieri. I paradossi della misura	pag. 69
4. La composizione del continuo	pag. 76
5. Continuità e discrezione	pag. 83
6. Le moltitudini infinite	pag. 85
7. Conclusione	pag. 92
CONCLUSIONE	pag. 97
INDICE DEI NOMI	pag. 105

PREMESSA

Il presente volume, *Questioni di filosofia della matematica nella "Scienza della logica" di Hegel*. "Die Lehre vom Sein" del 1831, rappresenta, con alcune varianti, il testo della dissertazione finale del Dottorato di ricerca in filosofia, con sede presso l'Università degli Studi di Padova: *Questioni di filosofia della matematica nella seconda redazione (1831) della "Scienza della logica" di Hegel*.

Questo lavoro appartiene al progetto di ricerca "L'antico nel moderno. I paradossi di Zenone: il continuo matematico e il problema dell'infinito attuale", sostenuto dalla STIFTUNG VOLKSWAGENWERK, Hannover.

Sento il dovere di ringraziare i docenti del Dottorato di ricerca in Filosofia dell'Università di Padova, in particolar modo i Proff. Pietro Faggiotto e Franco Biasutti, che hanno seguito la mia ricerca.

Ringrazio altresì il Prof. Dr. M.J. Petry, per l'attenzione con cui segue il mio lavoro e per il Suo incoraggiamento; lo "Hegel-Archiv" della Ruhr-Universität Bochum; il Prof. Dr. G. König della Ruhr-Universität Bochum; il Prof. Dr. I. Toth, Universität Regensburg, direttore del Progetto di ricerca, sopra citato, della Volkswagen-Stiftung.

Porgo il più vivo ringraziamento all'Istituto Italiano per gli Studi Filosofici, nella persona dell'Avvocato Gerardo Marotta, per aver contribuito a rendere possibile la pubblicazione di questo lavoro.

Esprimo tutta la mia riconoscenza al Prof. Franco Chiareghin, che mi ha sempre seguito nelle mie ricerche sul rapporto tra matematica e filosofia, e che con i suoi consigli ed il suo aiuto ha reso possibile la redazione e la pubblicazione di questo volume.

Ringrazio infine la Sig.ra Gabriella Pianta e gli amici Proff. Andrea Cerulli, Gianpaolo Rampazzo, Pres. Lorenzo Canale, V. pres. Giuseppe Peraro, per la disponibilità dimostrata e per le cure prestate alla composizione del testo. In questo senso esprimo un particolare ringraziamento a mio fratello Francesco Morretto e agli amici Proff. Alberto Barile e Luciano Viviani.

INTRODUZIONE

Il presente lavoro si propone di esaminare il rapporto tra "matematica superiore" e filosofia quale si presenta nella redazione del 1831 (pubblicata nel 1832) della prima parte della *Scienza della logica*, relativa alla "dottrina dell'essere".¹

In questo modo viene proseguita la ricerca iniziata con il volume *Hegel e la "matematica dell'infinito"*², in cui si era cercato

¹ Cf. G.W.F. HEGEL, *Wissenschaft der Logik. Erster Teil. Die objektive Logik. Erster Band. Die Lehre vom Sein* (1832), hrsg. v. F. HOGEMANN u. W. JÄSCHKE, in *Gesammelte Werke*, in Verbindung mit der Deutsche Forschungsgemeinschaft herausgegeben von der Rheinisch-Westfälischen Akademie der Wissenschaften, Band 21, Düsseldorf 1985 (citato d'ora in poi con *WdL*(1832)). Si tratta della redazione del 1831, pubblicata nel 1832 della "dottrina dell'essere". La prima edizione della *Scienza della logica* è del 1812-16: cf. HEGEL, *Gesammelte Werke*, cit., Band 11, *Wissenschaft der Logik. Erster Band. Die objektive Logik* (1812/13), hrsg. v. F. HOGEMANN u. W. JÄSCHKE, Düsseldorf 1978 (citato d'ora in poi con *WdL* (1812/13)); Band 12, *Wissenschaft der Logik. Zweiter Band. Die subjektive Logik* (1816), hrsg. v. F. HOGEMANN u. W. JÄSCHKE, Düsseldorf 1981 (citato d'ora in poi con *WdL* (1816)).

Per la traduzione italiana di *Gesammelte Werke*, B.de 11 (relativamente a "Die Lehre vom Wesen"), 12, 21, ci riferiamo a G.W.F. HEGEL, *Scienza della logica*, trad. di A. Moni, Bari 1981. Nelle citazioni porremo l'indicazione delle pagine della trad. it. tra parentesi, dopo l'indicazione delle pagine del testo tedesco. Segnaliamo la grande cura posta dagli editori Hogemann e Jäschke nelle *Anmerkungen* e nelle indicazioni relative al testo (cfr. *Editorischer Bericht*) della *Wissenschaft der Logik, Gesammelte Werke* B.de 11, 12, 21; d'altra parte tutta l'edizione dei *Gesammelte Werke* è ispirata a criteri di grande "acribia" e ricchezza di documentazione.

² Per non appesantire l'esposizione ci sia concesso di rinviare, per ulteriori indicazioni di carattere matematico e per un primo orientamento bibliografico, a A. MORETTO, *Hegel e la "matematica dell'infinito"*, Trento 1984; A. MORETTO, *L'infuence de la "mathématique de l'infinité" dans la formation de la dialectique hégélienne*, in *Hegels Philosophie der Natur*, cit. *infra*. In ogni caso sulla matematica in Hegel, tra

di delineare lo sviluppo della riflessione hegeliana sul "calcolo infinitesimale", a partire dalle *Geometrische Studien* (1800) sino alla *Scienza della logica* nell'edizione 1812-16.

Com'è noto, Hegel rielaborò la prima parte della "logica oggettiva" nella redazione del 1831, operando numerosi interventi al testo del 1812 sulla "dottrina dell'essere". La morte, avvenuta nel 1831, impedì ad Hegel di portare a compimento la revisione della *Scienza della logica*. Il contenuto della redazione del 1831 acquista così un particolare valore, poiché rappresenta l'ultima esposizione del suo pensiero sugli argomenti presi in considerazione.

La riflessione sulla matematica occupa un posto di grande rilievo nella *Scienza della logica*, e l'infinito matematico è un tema privilegiato per esaminare il punto di vista hegeliano sulla matematica. La stessa ampiezza delle tre Note sull'infinito matematico dell'ultima redazione testimonia l'importanza che Hegel attribuisce a questo tema.

Hegel riconosce che la riflessione sul calcolo infinitesimale permette una migliore comprensione delle categorie filosofiche della qualità, della quantità, del quanto, dell'infinito, della relazione, della misura, che costituiscono la struttura stessa della "dottrina dell'essere".

In questa indagine Hegel si serve della riflessione sull'analisi matematica dal 1600 ai primi anni dell'Ottocento per avere im-

i più recenti lavori, si veda: M. REHM, *Hegels spekulative Deutung der Infinitesimalrechnung*, Diss., Köln 1963; V. VERRA, *Hegel critico della filosofia moderna: matematica e filosofia*, "De Homine", 38-40 (1971), pp. 105-130; R. BODEL, *Sistema ed epoca in Hegel*, Bologna 1975, pp. 213-267; J.O. FLECKENSTEIN, *Hegels Interpretation der Cauchitschen Infinitesimalmethode*, "Hegel-Studien", Beiheft 11, Bonn 1974, pp. 117-124; M. GALUZZI, A. GUERRAGGIO, *Il calcolo differenziale nella "Scienza della logica" di G.W.F. Hegel*, "Epistemologia", 2 (1979); F. CHIEREGHIN, *Dialettica dell'assoluto e ontologia della soggettività. Dall'ideale giovane alla Fenomenologia dello spirito*, Trento 1980, pp. 335-351; L.E. FLEISCHHACKER, *Über de grenzen van de kwantiteit*, Diss., Amsterdam 1982, pp. 104 sgg.; G. CIPOLETTI, *Il calcolo infinitesimale e la ricostruzione della sua storia da parte di Hegel*, "Filosofia oggi", IX (1986), pp. 447-472; M. WOLFF, *Hegel und Cauchy. Eine Untersuchung zur Philosophie und Geschichte der Mathematik*, in *Hegels Philosophie der Natur*, cit. *infra*, pp. 197-263; V. VERRA, *L'infinito della ragione*, in *L'infinito nella scienza. Infinity in Science*, a cura di G. TORALDO DI FRANCA, Roma 1987, pp. 273-282. Nel volume cit. *infra*: Hegel und die Naturwissenschaften si veda: L.E. FLEISCHHACKER, *Quantität, Mathematik, Naturphilosophie*; V. HOSLE, *Raum, Zeit, Bewegung*; P. VARDY, *Zur Dialektik der Metamathematik*; I. TOTH, *Mathematische Philosophie und hegelische Dialektik*.

portanti indicazioni di carattere speculativo, che si connettono ad alcune fondamentali posizioni di pensiero della filosofia greca classica sul rapporto finito-infinito e sulla contraddizione. Questa indagine gli permette altresì di avere una migliore determinazione dell'ambito in cui il metodo matematico è applicabile correttamente.

Per ciò che riguarda il riferimento matematico, nella Nota del 1812 dal titolo "Der Begriff des mathematischen Unendlichen" Hegel aveva preso in particolare considerazione il calcolo infinitesimale secondo Newton, Leibniz, Eulero, il metodo dei limiti, con particolare riferimento a L'Huilier, il metodo delle serie con particolare riguardo a Newton e a Lagrange. Con riferimento a Lagrange egli si sofferma anche su alcune applicazioni degli sviluppi in serie nella meccanica, ma non affronta il "calcolo delle funzioni", ossia le operazioni di derivazione e la sua inversa.

L'analisi matematica, tra la fine del Settecento ed i primi anni dell'Ottocento, non era ancora riuscita ad ottenere una sistemazione rigorosa dei suoi metodi infinitesimali. Infatti il metodo dei limiti non appariva ancora espresso con la necessaria coerenza nell'esposizione di Lacroix; e l'opera analitica di Cauchy era ammissibile per la strategia argomentativa, ma proprio la definizione di limite non appariva esposta in modo convenientemente rigoroso. Il "calcolo delle funzioni" di Lagrange per molti versi si presentava come la costruzione matematica più rigorosa, che però poggiava su fondamenta insicure, vale a dire la teoria delle serie, sulla quale nei primi anni dell'Ottocento si accentravano le riserve dei matematici (in particolare Cauchy ed Abel).

Per ciò che riguarda il riferimento matematico, la redazione del 1831 evidenzia la preoccupazione di Hegel di adeguare le considerazioni sulla "matematica dell'infinito" alla situazione dell'analisi tra la fine del Settecento e l'inizio dell'Ottocento, con particolare riguardo alla sistemazione lagrangiana ("calcolo delle funzioni"), ed alla riproposizione del metodo dei limiti da parte di Lacroix (1797) e di Cauchy (1821, 1823). Il metodo dei limiti viene trattato nella I Nota: "La determinatezza concettuale dell'infinito matematico"; il "calcolo delle funzioni" nella II Nota: "Lo scopo del calcolo differenziale dedotto dalla sua applicazione".

Questa attenzione verso gli ultimi sviluppi della ricerca matematica corrisponde al metodo stesso di lavoro hegeliano: egli

vuole aggiornarsi di continuo sullo statuto epistemologico delle diverse scienze, per confrontarlo con le proprie posizioni di pensiero³.

Ma Hegel non trova sufficiente questa esplorazione "in avanti", e ritiene utile anche un confronto con le proposte "geometriche" sul calcolo infinitesimale precedenti la sistemazione data all'analisi da Newton e da Leibniz, in modo particolare con il metodo di Cavalieri. In questo modo nella III Nota, "Ancora altre forme connesse colla determinazione qualitativa della grandezza", egli si sofferma sul rapporto tra l'infinito, il continuo ed il discreto, e si ricollega anche ai temi speculativi della I Nota.

Data la complessità del quadro ci è sembrato opportuno ricercare se vi fossero alcuni temi fondamentali attorno ai quali si muove il discorso hegeliano, e seguire questi per non disperderci nella moltitudine degli argomenti trattati e per connetterli tra loro. Ci è parso che i due temi fondamentali attorno ai quali si articolano le tre Note fossero i seguenti: a) la matematica intuisce l'aspetto *speculativo* contenuto in alcune sue determinazioni; b) data la natura intellettuale del suo *metodo* essa non è in grado di rappresentarlo in modo adeguato. Però anche come scienza dell'intelletto essa è degna del massimo interesse da parte dell'indagine filosofica.

Mediante l'analisi di questi due temi risulta più agevole affrontare anche altre questioni, quali ad esempio il ruolo svolto dalle tre Note nella Logica di Hegel, il rapporto tra la redazione del 1831 e l'edizione del 1812 della "dottrina dell'essere", la valutazione della riflessione hegeliana sulla matematica in relazione allo *status* della matematica nella sua epoca ed anche in vista dei successivi sviluppi della matematica.

Nell'esaminare le questioni che abbiamo esposto, il saggio, dopo la presente Introduzione, si articola in tre capitoli. Il primo capitolo riguarda l'aspetto speculativo della "matematica dell'infinito" e l'infusso della meditazione sul *Filebo* e sul *Parmenide*

³ A questo riguardo rinviamo ai volumi *Hegel und die Naturwissenschaften*, hrsg. M.J. PETRY, Stuttgart - Bad Cannstatt 1987, e *Hegels Philosophie der Natur*, hrsg. R.-P. HORSTMANN u. M.J. PETRY, Stuttgart 1986, contenenti gli Atti dei Congressi di Tübingen, 1983, organizzato dall'Istituto Italiano Per Gli Studi Filosofici, e di Amersfoort, 1985, organizzato dalla Internationale Hegel-Vereinigung. Da questi volumi risulta lo stato attuale della ricerca sulla filosofia della natura di Hegel, in cui un ruolo importante spetta indubbiamente al rapporto matematica-filosofia.

sul punto di vista hegeliano, con particolare riguardo alla I Nota. Il secondo capitolo, con riferimento sia alla prima che alla seconda Nota, esamina l'insufficienza del metodo matematico sul piano della ragione (Vernunft) e la possibilità di un'esposizione corretta del calcolo infinitesimale (la proposta di Lagrange del "calcolo delle funzioni") sul piano dell'intelletto (Verstand). Il terzo capitolo, tratta della terza Nota. In essa, oltre alle critiche all'insufficienza del metodo nei confronti del concetto di infinito, emerge nuovamente l'importanza dell'intuizione di questo concetto. A questo proposito grande rilievo ha in essa il confronto con Cavalieri.

L'ASPETTO CONCETTUALE DELL'INFINITO DELLA MATEMATICA

CAPITOLO I

1. Introduzione.

Uno dei compiti più importanti che si prefigge la filosofia hegeliana è quello di superare l'antitesi tra il finito e l'infinito mediante la determinazione logica del *vero infinito*. Questo superamento avviene sia a livello della *qualità*, con il vero infinito qualitativo, sia a livello della *quantità*, con il vero infinito quantitativo.

Il finito si origina dalla limitazione, e il *cattivo infinito*, nella forma del progresso all'infinito, altro non è che una continua riproposizione del limite, pertanto una continua riproposizione del finito. Affinché si raggiunga il vero infinito sarà necessaria l'unione del finito e dell'infinito (come cattivo infinito).

Le tre Note sull'infinito matematico permettono di avere ulteriori indicazioni su questo tema così importante per la filosofia hegeliana, ossia il rapporto tra il finito e l'infinito. La cattiva infinità e la vera infinità trovano infatti qui importanti esemplificazioni. Hegel si serve altresì della sua analisi del calcolo infinitesimale per giustificare la "assunzione in contraddittoria della contraddizione"¹, rilevandone un analogo uso in alcuni metodi infinitesimali.

Ci sembra che il *vero infinito* e la "vera contraddizione" – quella in cui gli opposti sono "momenti" di una superiore unità

¹ Si veda F. CHEREGHIN, *Incontraddittorietà e contraddizione in Hegel*, "Verifiche", X (1981), pp. 262 segg.

(distinguendosi così dall'"espressione della contraddizione" in cui gli opposti hanno una sussistenza indipendente l'uno dall'altro) — rappresentino alcuni fondamentali aspetti concettuali della matematica dell'infinito. Parlando di "aspetti concettuali" ci riferiamo alla valenza dialettica-speculativa che Hegel propone per il concetto, il quale è "essenzialmente un'unità di caratteri distinti"².

La riflessione hegeliana sull'importanza dell'analisi superiore non va però limitata al confronto con i matematici ed i filosofi che si sono occupati di questi problemi nell'era moderna e nei primi anni dell'Ottocento.

Ci sembra invece che mediante la riflessione sui concetti di *infinito* e della *contraddizione* contenuti in alcune esposizioni del calcolo infinitesimale Hegel voglia riproporre l'attualità dell'insediamento platonico contenuto nei dialoghi "dialettici" *Filebo* e *Parmenide*.

2. La cattiva infinità del progresso infinito e le sue esemplificazioni matematiche.

L'infinito viene ordinariamente considerato come il "non-finito", pertanto come "l'indeterminato vuoto, l'al di là del finito". Ma osserva Hegel, "posto così l'infinito contro il finito per modo che essi abbiano l'uno verso l'altro la qualitativa relazione di *altri*, l'infinito è da chiamarsi il *cattivo infinito*, l'infinito dell'*intelletto*, cui cotesto infinito vale come suprema, assoluta verità"³.

L'intelletto però si impiglia nelle contraddizioni, "non appena passa all'applicazione e alla esplicazione di queste sue categorie" del finito e del cattivo infinito, con le quali riteneva "di avere raggiunto il suo appagamento nella conciliazione della verità". E la contraddizione ha origine dal fatto che l'infinito, se viene definito in questo modo, come negazione del finito, è un limite del

finito, e pertanto viene a sua volta limitato. Esso è pertanto "un infinito, il quale è esso stesso finito"⁴.

Con il *progresso all'infinito* si cerca di ovviare all'opposizione tra il finito e l'infinito modificando successivamente il limite del finito, ma in questo modo esso è "la *contraddizione* che non si è sciolta, ma si continua sempre ad enunciare solo come *presente*"⁵. Le determinazioni *relative* (in questo caso il finito e l'infinito) "vengono spinte alla loro opposizione, così che stanno in una unità inseparabile, e nondimeno a ciascuna viene attribuito contro l'altra un esserci indipendente"⁶.

Queste considerazioni su *finità*, *cattiva infinità* e *progresso infinito*, esposte nell'ambito della *qualità*, trovano corrispondenza nelle precisazioni che hanno luogo nell'ambito della *quantità* e che riguardano il *quanto* (categoria in cui rientrano le *grandezze* della matematica).

Il quanto "è anzitutto la quantità con una determinatezza o limite in generale"⁷, limite che d'altra parte, a differenza di quello qualitativo, è un *limite indifferente*⁸. Hegel precisa che "la definizione, che in matematica si dà della *grandezza*, riguarda anch'essa il quanto. Ordinariamente si definisce una *grandezza* come qualcosa che può essere *aumentato* o *diminuito*... La *grandezza* sarebbe quello di cui si può mutar la *grandezza*"⁹. Questa definizione palesa da un lato una "circolarità definitoria", come osserva Hegel. Dall'altro essa evidenzia proprio l'indifferenza del quanto rispetto al suo mutamento, e quindi al suo limite. In questo modo "nel suo concetto stesso... sta la sua indifferenza di fronte a se stesso"¹⁰. In queste definizioni pertanto è già contenuta la "dialettica del quanto": "la *finità* e quella *infinità* che da essa dovrebbe star separata (e che è però la *cattiva infinità*) hanno, nel quanto, ciascuna già in sé il momento dell'altra"¹¹.

La relazione tra *finità* e *infinità* è il *progresso infinito* quanti-

² G.W.F. HEGEL, *Enzyklopädie der philosophischen Wissenschaften im Grundriss* (1830), hrsg. v. F. NICOLIN u.O. POGGELER, Hamburg 1969, par. 158 (citato d'ora in poi con *Enzyklopädie*). Per la traduzione italiana ci riferiamo a

G.W.F. HEGEL, *Enciclopedia delle scienze filosofiche in compendio*, Traduzione, Prefazione e Note di B. Croce, Glossario e Indice dei nomi di N. Merker, Introduzione di C. Cesa, Bari 1978⁴.

³ *Wdl* (1832), 126-127 (141).

⁴ *Ivi*, 127 (141).

⁵ *Ivi*, 129 (144).

⁶ *Ivi*, 129 (143-144).

⁷ *Ivi*, 193 (216).

⁸ *Ivi*, 193 (216). Il riferimento del testo al *quanto* intensivo si può applicare al

quanto in generale. Cfr. *ivi*, 173 (196): "Il quanto è la determinatezza indifferente, vale a dire la determinatezza che passa oltre a se stessa, che nega se stessa".

⁹ *Ivi*, 175 (197).

¹⁰ *Ivi*, 175 (197).

¹¹ *Ivi*, 219 (246).

tativo: esso "è l'espressione di quella contraddizione che si contiene nel finito quantitativo o nel quanto in generale", e che consiste "nell'avvicinarsi delle determinazioni del finito e dell'infinito"¹². Il progresso infinito è "l'espressione della contraddizione, non già la sua soluzione... Com'è posto in sulle prime, esso è il compito dell'infinito, non il suo raggiungimento", e in questo modo l'infinito è colto solo nel suo aspetto negativo, di incompletezza, senza che "diventi un positivo e un presente" ¹³.

Dopo queste considerazioni di carattere generale, prenderemo in particolare considerazione l'applicazione del *progresso infinito* in matematica. Per le altre scienze ci limitiamo a ricordare la critica di Hegel all'"insulsa meraviglia" di alcuni astronomi per la *misuratezza* dell'universo, che veniva intesa come una testimonianza "dell'eccellenza della loro scienza". Ma, osserva Hegel, la loro scienza "è invece meravigliosa non già a cagione di cotesta infinità quantitativa, ma al contrario per i rapporti di misura e per le leggi, che la ragione conosce in tali oggetti e che costituiscono l'infinito razionale a fronte di quella infinità irrazionale"¹⁴.

Più in generale "la cattiva infinità, principalmente nella forma del *progresso del quantitativo all'infinito*... suol essere riguardata come un che di sublime e come una sorta di culto, nella stessa maniera che nella filosofia cotesto progresso è stato ritenuto un che di ultimo". Hegel contrasta decisamente questo punto di vista: il progresso all'infinito altro non è che "questo continuo sorpassare il limite, che è l'impotenza di toglierlo e la perenne ricaduta in esso"¹⁵.

Il *progresso infinito* corrisponde ad una concezione *potenziale* dell'infinità per un processo che ammette sempre una ulteriore determinazione, conformemente alle indicizzazioni che vengono da Aristotele (ὀυράκει ἀρεγοῖν)¹⁶. In matematica questo *progresso infinito* si esplica in vari modi: *progresso infinito della*

¹² *Ist.*, 220 (247-248).

¹³ *Ist.*, 220 (248).

¹⁴ *Ist.*, 224 (251-252).

¹⁵ *Ist.*, 252 (250).

¹⁶ Cfr. ARISTOT., *Phys.*, III (I) 207b 11-14: "il numero è infinito in potenza, ma non in atto; epperò sempre il numero assunto supera qualsiasi pluralità determi-

molitudine (che ammette sempre ulteriori elementi); della grandezza (di ogni grandezza si può trovare una grandezza più grande o più piccola); delle operazioni (si danno algoritmi che possono proseguire indefinitamente). In ogni caso ci troviamo di fronte ad un processo "inesauribile". Questo *progresso infinito* è particolarmente evidente nelle *serie infinite*, nelle *scritture decimali illimitate*, nelle *approssimazioni infinite*.

La critica di Hegel è estremamente semplice ed efficace: una concezione esclusivamente potenziale dell'infinito non permette di raggiungere alcun risultato determinato, proprio perché per definizione il processo non è mai compiuto. Viene così ripresa la fondamentale obiezione mossa da Zenone contro processi del tipo della dicotomia infinita del segmento: dividendo il segmento AB a metà con il punto M_1 , il segmento M_1B con il punto M_2 , ecc., non si giungerà mai al punto B . Se ad esempio il segmento ha lunghezza 2, si avrà che $S_n = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots + 1/2^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, non potrà mai essere uguale a 2 per quanto grande sia il numero naturale n . E dire che 2 è il *limite* di S_n al tendere di n all'infinito, non significa aver risposto alla critica di Zenone (e di Hegel), poiché una risposta del genere necessita di concezioni che vanno oltre la condizione di infinità potenziale.

3. Il vero infinito.

Come si è già ricordato nel paragrafo introduttivo il vero infinito è l'unità del finito e dell'infinito (cattivo infinito). Questa unità non va intesa come un'astratta uguaglianza di queste determinatezze, ma come un tutto in cui "il finito e l'infinito stanno così solo come momenti"¹⁷. Questa considerazione effettuata nella "qualità" trova ulteriore svolgimento nella "quantità"¹⁸. Il *progresso infinito* è l'espressione della contraddizione permanente, poiché contiene sia la negazione del quanto (che è l'aspetto dell'infinito), sia la negazione di questa negazione (che è nuovamente l'aspetto del finito). La verità del *progresso infinito* "è la loro

nata. Tuttavia questo numero non è separabile [dalla dicotomia], e l'infinità non permane, ma si genera, come anche si generano il tempo e il numero del tempo" (trad. di A. Russo).

¹⁷ *WdL*, (1832), 135 (151).

¹⁸ Cfr. *Ist.*, 220-222 (247-250).

unità, nella quale esse sono ma come momenti. — Questa unità è la soluzione della contraddizione, di cui il progresso infinito è l'espressione¹⁹.

Anche in questo caso i termini su cui si imposta il problema sono il finito (che è un limitato), e l'infinito (che è la negazione del finito). Il vero infinito si otterrà con la negazione della negazione: "Così l'infinito è determinato solo come *prima* negazione, e così esso appare nell'infinito progresso. Venne però mostrato che in questo vi è di più, che vi è cioè la negazione della negazione ossia quello che l'infinito è in verità"²⁰.

Per esprimere il vero infinito si deve, per così dire, "negare" il progresso infinito, e questo si ottiene mediante una "limitazione = determinazione" cui si assoggetta il progresso infinito conformemente alla prescrizione spinoziana riportata da Hegel come "*omnis determinatio est negatio*"²¹.

Questo è un punto molto importante per la speculazione sull'infinito, e non solo in Hegel. La indeterminatezza dell'infinito potenziale va precisata, determinandone univocamente (pertanto limitandone) la modalità di svolgimento del processo nella sua interezza (totalità), anche se non si possono determinare effettivamente tutti i singoli elementi interessati nella loro individualità.

Il concetto del vero infinito ha una estensione molto ampia. Per questo motivo sarà opportuno limitarci alla questione dell'infinito matematico, ricordando gli esempi proposti esplicitamente da Hegel.

Hegel afferma perentoriamente che "dal punto di vista filosofico l'infinito matematico è però importante per questo, che, nel fatto, vi sta in fondo il concetto del vero infinito, e ch'esso sta molto al di sopra del cosiddetto infinito metafisico, in base al quale si muovono le obiezioni contro il primo"²².

La matematica, accanto agli esempi di *cattiva infinità* (tra i

¹⁹ *Ist*, 234 (261-262).

²⁰ *Ist*, 234 (262).

²¹ *Ist*, 101 (108). Cfr. B. SPINOZA, *Epistola L*, in *Opera*, hsg. C. GEB-

HARDT, 4 voll., Heidelberg s.d. (1924), qui vol. IV, p. 240: "Quia ergo figura non aliud, quam determinatio, & determinatio negatio est; non poterit, ut dictum, aliud quid, quam negatio, esse".

²² *WdL* (1832), 237 (264-265).

quali tipico è quello delle serie infinite), propone anche esempi di *vera infinità*. In questo vero infinito della matematica, a differenza di quanto accade per l'infinito metafisico, si realizza una stretta "unione" tra l'infinito ed il limite: nell'infinito metafisico "la negazione, ch'esso esprime, si contrappone ad un limite solamente in modo che questo limite continua a *subsistere* fuori di quell'infinito, né vien tolto da esso, mentre all'opposto l'infinito matematico ha veramente tolto o assorbito in sé il limite finito, poiché l'al di là del limite è unito col limite stesso"²³.

Hegel ritiene che il concetto del *vero infinito* sia contenuto in esempi matematici in cui si prendono in considerazione *tutti* gli infiniti elementi di una moltitudine, i quali sottostanno a determinate condizioni, ossia obbidiscono ad una ben specificata legge. Egli riconosce il suo debito in modo particolare verso Spinoza che, nell'*Epistola XII*, per dare un esempio di un *infinitum actu*, da contrapporre all'infinito dell'immaginazione, si era riferito alla *totalità* dei segmenti compresi nello spazio limitato da due cerchi, contenuti l'uno nell'altro e non concentrici, e giacenti sulle semirette aventi origine nel centro di una delle due circonferenze (ad es.: quella avente il raggio più piccolo)²⁴.

Seguendo questa indicazione di Spinoza, ritenuta di fondamentale importanza sin da *Fede e sapere* (1802), Hegel vede la *vera infinità* (che è un *infinitum actu*) nella *comprensione unitaria dell'infinitamente molteplice*: il vero infinito "è infatti *actu*, è *relemente*, infinito, perchè è compiuto in sé e presente (es ist nämlich *actu*, es ist *wirklich* unendlich, weil es in sich vollendet und gegenwärtig ist)"²⁵.

Secondo Hegel l'esempio di Spinoza dei due cerchi è concettualmente affine alla nozione di *funzione/relazione* proposta dai matematici: "l'incommensurabilità che sta nell'esempio di Spinoza, racchiude in generale in sé le funzioni delle linee curve, e conduce più precisamente a quell'infinito, che la matematica ha introdotto in tali funzioni, e in generale nelle *funzioni delle grandezze variabili*, e che è il vero infinito matematico, l'infinito quantitativo, al quale pensava anche Spinoza"²⁶.

²³ *Ist*, 246-247 (274).

²⁴ *Ist*, 247-249 (275-277). Cfr. SPINOZA, *Epistola XII*, in *Opera*, cit., vol. IV,

pp. 59 sgg.

²⁵ *WdL* (1832), 248 (277).

²⁶ *Ist*, 248-249 (277).

Questa riconduzione del concetto di funzione a quello della moltitudine attualmente infinita dell'esempio di Spinoza è estremamente pertinente. In effetti questa connessione sussiste (anche se ricorriamo al concetto di funzione come viene comunemente inteso ai nostri giorni), poiché nella funzione che ha per grafico una linea curva la variabile indipendente varia su intervalli, che sono insieme infiniti. Aggiungiamo ancora che lo stesso esempio di Spinoza può essere facilmente interpretato mediante una funzione, stabilendo, ad es., un sistema di ascisse curvilinee sulla circonferenza interna, e facendo corrispondere ad ogni ascissa x la corrispondente ordinata y , data dalla misura del segmento compreso tra i due cerchi, poggianti sull'estremo dell'arco di ascissa x . Si ottiene in ogni caso una funzione $y = f(x)$, i cui valori sono compresi tra un minimo assoluto m , ed un massimo assoluto M , la qual cosa corrisponde tra l'altro alle indicazioni di Spinoza.

A proposito della definizione matematica di funzione, nella *Scienza della logica* del 1812 Hegel precisa quanto segue sulla dizione "funzioni di grandezze variabili": "quando alla x viene attribuito un determinato valore, anche y riceve mediante la funzione un determinato valore".²⁷ Oltre a ciò, nella *Scienza della logica* del 1831, riferendosi ai problemi dell'analisi indeterminata, ossia esprimibili con un numero di equazioni indipendenti inferiore al numero delle incognite (ad es. la sola equazione $x^2 + y^2 = 1$: circonferenza di raggio unitario e centro l'origine degli assi), egli osserva che il valore delle grandezze è indeterminato, "ma in maniera tale che quando per l'una sopravviene da qualche parte un valore completamente determinato, cioè un valore numerico, anche l'altra è determinata, e così l'una è funzione dell'altra"²⁸; anche prima, del resto, si era riferito a "grandezze che per mezzo di un'equazione vengono a trovarsi fra loro nel rapporto che l'una sia una funzione dell'altra"²⁹.

Queste considerazioni di Hegel vanno collegate al grande dibattito matematico sul concetto di funzione (al quale dettero importanti contributi Leibniz, Jean Bernoulli, Euler, Lagrange, Laplace, Cauchy), intesa nella sua accezione più ampia come un "legame" tra variabili suscettibile di infinite determinazioni, sul-

²⁷ *WdL* (1812-13), 164.

²⁸ *WdL* (1832), 277 (310).

²⁹ *Ist*, 267 (299).

la particolare classe di funzioni dette "analitiche", ossia quelle in cui la legge della corrispondenza, esplicita oppure implicita, era espressa con le "operazioni analitiche", vale a dire quelle algebriche, quelle trascendenti (es.: esponenziale, logaritmo) ed altri procedimenti forniti dall'analisi.³⁰

4. L'influsso del "Filebo" di Platone nella problematica hegeliana sull'infinito.

Oltre alle funzioni e all'esempio di Spinoza dello spazio compreso tra i due cerchi nelle *Lezioni sulla storia della filosofia* Hegel prende in considerazione come esempio di vero infinito i punti contenuti in un segmento.³¹ E nella *Scienza della logica*, con riferimento all'aritmetica, egli considera le infinite frazioni equivalenti ad una data frazione a/b .³²

In tutti questi esempi viene presa in considerazione un'infinità di elementi, i quali obbediscono tutti a ben precise prescrizioni: i segmenti dell'esempio di Spinoza sono tutti e soli quelli ottenibili con la costruzione descritta; i punti del segmento AB sono tutti e soli quelli "compresi" tra A e B ; le frazioni equivalenti alla frazione a/b sono tutte e sole le frazioni m/n tali che $mb = na$ (m, n, a, b , sono numeri naturali, e $b, n \neq 0$); le funzioni/relazioni si identificano con tutte e sole le coppie ordinate di numeri che in uno o più intervalli soddisfano alla relazione in questione (adoperiamo un linguaggio più vicino a quello contemporaneo per illustrare gli esempi di Hegel).

Pertanto in questi esempi di vero infinito, il cattivo infinito è la semplice moltitudine infinita degli elementi, permessa dalle

³⁰ Cfr. U. BOTTAZZINI, *Il calcolo sublime: storia dell'analisi matematica da Euler a Weierstrass*, Torino 1981, pp. 19 segg.

³¹ Cfr. G.W.F. HEGEL, *Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie III, in Werke, Auf der Grundlage der Werke von 1832-1845 neu edierte Ausgabe*, Redaktion E. MOLDENHAUER u. K.M. MICHEL, Frankfurt am Main 1971, Band 20, pp. 171-172: "eine Linie, eine beschränkte Linie, besteht aus unendlich vielen Punkten und ist doch gegenwärtig, ist bestimmt". Nel volume pubblicato di recente G.W.F. HEGEL, *Vorlesungen. Ausgewählte Nachschriften und Manuskripte*, Band 9, *Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie*, Teil 4, hrsg. v. P. GARNIRON u. W. JÄSCHKE, Hamburg 1986, cfr. p. 107: "Von jeder Linie, die beschränkt ist, kann man sagen, sie besteht aus unendlich vielen Punkten, und doch ist die Linie präsent, gegenwärtig, ist bestimmt".

³² *WdL* (1832), 242 (269-270).

condizioni di infinità potenziale, mentre il *limite* vien dato dalla legge complessiva che governa questi infiniti elementi.

Se la legge in questi esempi non viene vista *astrattamente*, separandola dalla moltitudine degli elementi, ma in stretta connessione con questi, in questo modo si realizza secondo Hegel il vero infinito, l'*effettiva unione* tra il limite e l'infinito³³.

In tutti questi esempi, geometrici, algebrici, analitici, si è passati dalla "individualità assoluta" alla "individualità relazionale" degli elementi di una moltitudine infinita³⁴.

Questo concetto molto ampio di *relazione*, che trova nella matematica importanti esemplificazioni, rappresenta il grande guadagno ottenuto dalla logica hegeliana mediante la dialettica tra l'infinito ed il limite. Con la *relazione* infatti si realizza il passaggio dalle categorie della *quantità* a quelle della *misura*, in cui i concetti relazionali vengono applicati nello studio delle leggi della natura.

Questi esempi stavano ad indicare ad Hegel la possibilità della comprensione unitaria dell'infinitamente molteplice, di una moltitudine *actu* infinita, secondo il punto di vista di Spinoza. Riteniamo però che una fonte ispiratrice delle considerazioni hegeliane sul cattivo infinito, sul limite e sul vero infinito possa ritrovarsi anche nel *Filebo* platonico, in cui si dà una soluzione positiva all'anitesi tra i molti (gli infiniti molti) e l'uno.

Senza impegnarci nella problematica della concezione della matematica in Platone, cercheremo di evidenziare le corrispondenze tra il testo hegeliano e quello platonico.

³³ Nel vero infinito il cattivo infinito ed il limite sono i suoi *momenti*, e vanno considerati sullo stesso piano. Altrorché Hegel, per sottolineare l'insufficienza del cattivo infinito, sostiene che il limite, o la legge, sono più importanti, ci pare si debba intendere che il vero infinito, contenente la legge, o il limite, è superiore al cattivo infinito. In questo senso cfr. l'affermazione, già citata, che i rapporti di misura e le leggi costituiscono l'infinito razionale (*Ist*, 224 (252)). Sull'importanza del limite cfr. anche *ivi*, 325 (368): "Parmenide introduce, dopo l'astratto essere, la necessità, come l'antico limite che a tutto è posto" (con riferimento alla misura); HEGEL, *Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie II*, in *Werke*, cit., Band 19, p. 77: "L'illimitato è ancora astratto, più elevato è il limitato, ciò che si autodetermina, che si limita"; HEGEL, *Vorlesungen* cit., Band 3, *Vorlesungen über die Philosophie der Religion*, Teil I, hrsg. v. W. JÄSCHKE, Hamburg 1983, p. 213, nota: "Plato erklärte das *πέντες*, die sich in sich begrenzende Grenze, für höher als das Unbegrenzte" (viene riportato il testo secondo H.G. Hotho).

³⁴ L. LOMBARDO-RADICE, *Istituzioni di algebra astratta*, Milano 1977, p. 10.

Nella organizzazione delle categorie logiche Hegel ha presente il *Filebo* platonico: la successione dei generi *ἄρετων*, *τέρας*, *μυθρόν*, *αἰρία*, rappresenta uno schema che muove da ciò che è indeterminato a ciò che è sempre più determinato, complesso e concreto, come accade per i raggruppamenti categoriali della *Logica di Jena* e della *Scienza della logica*³⁵. In questo modo teniamo conto dell'osservazione di Rosenkranz (espressa con riferimento al "System" jenese di logica, metafisica e filosofia della natura, che egli attribuiva al periodo di Francoforte): "Platone si serve nel *Filebo*, onde esprimere l'unità determinata del determinato e dell'indeterminato, del *τέρας* e dell'*ἄρετων*, del termine *μέτρον*. Questo termine fu usato più tardi da Hegel per designare l'unità della qualità e della quantità", vale a dire la "misura (Maß)". "Ma in nessun caso", prosegue Rosenkranz, "egli intraprese, con lo sviluppo di questo gruppo di concetti, qualcosa di *inaudito*, come spesso ha invece affermato l'ignoranza, che tutto avrebbe potuto supporre, tranne un rapporto tra il concettoso svero ed il facondo greco"³⁶.

Osserva ancora Rosenkranz che "accanto all'influsso di Platone è qui abbastanza visibile anche quello di Kant. Ma egli si distingue da Kant in quanto colloca il concetto di qualità prima di

³⁵ Cfr. G.W.F. HEGEL, *Gesammelte Werke*, Band 7, *Jenauer Systementwürfe II*, hrsg. v. R.P. HORSTMANN u. J.H. TREDE, Bonn - Bad Godesberg 1971, alla sezione "Einfache Beziehung"; per la trad. it. si veda G.W.F. HEGEL, *Logica e metafisica di Jena* (1804/05), a cura di F. CHIEREGHIN, trad., introd. e commento di F. BIASUTTI, L. BIGNAMI, F. CHIEREGHIN, A. GAIARSA, M. GIACIN, F. LONGATO, F. MENEGONI, A. MORETTO, G. PERIN-ROSSI, Trento 1982, alla sezione "Rapporto semplice". Citiamo d'ora in poi con *Jenauer Systementwürfe II*, seguito dall'indicazione delle pagine e, tra parentesi, delle pagine della trad. it.

Nella *Scienza della logica* Hegel precisa che l'essere "è l'immediato, l'ancora assolutamente indeterminato": *WdL* (1832), 82 (85).

³⁶ K. ROSENKRANZ, *Georg Wilhelm Friedrich Hegels Leben*, Darmstadt 1972 (rist. anast. dell'ed. Berlin 1844), p. 105, trad. it. *Vita di Hegel*, introd. trad. e note a cura di R. Bodei, Milano 1974, p. 125. Sull'influsso dei dialoghi "dialettici" di Platone sulla filosofia di Hegel si veda: H.-G. GADAMER, *Hegel und die Antike* *Dialektik*, "Hegel-Studien", 1 (1961), pp. 173-199; F. CHIEREGHIN, *Hegel e la metafisica classica*, Padova 1966; W. KUNNE, *Hegel als Lehrer Platos: Ein Beitrag zur Interpretation des Platonischen "Parmenides"*, "Hegel-Studien", 14 (1979), pp. 109-146; K. DÜSING, *Ontologie und Dialektik bei Plato und Hegel*, "Hegel-Studien", 15 (1980), pp. 95-150; CHIEREGHIN, *Dialektik der absoluten* cit., pp. 180-192; CHIEREGHIN, *Incontradittorietà e contraddizione* cit., p. 265. Per una più generale informazione si veda J.-L. VIEILLARD-BARON, *Platon et l'idéalisme allemand* (1720-1860), Paris 1979.

quello di quantità e deduce dialetticamente quest'ultimo dal primo, mentre nella tavola kantiana delle categorie esse sono soltanto giustapposte³⁷.

Ciò vale per i raggruppamenti categoriali nella loro sequenza. Ci sembra però che queste indicazioni mantengano il loro valore anche all'interno dei raggruppamenti categoriali, se prendiamo in considerazione i primi tre generi del *Filebo*: l'*infinito*, il *limite*, ed il *genere misto*³⁸.

Infatti nello stesso Kant, allorché nella *Critica della ragion pura* afferma che in ogni classe di categorie "la terza categoria deriva sempre dall'unione della seconda con la prima della sua classe"³⁹, troviamo una certa analogia con il *Filebo* nell'interpretazione della terza categoria come *unione* delle prime due. Hegel critica l'*unione* proposta da Kant, e critica il termine *unione* in Platone, come vedremo, perché suggerisce l'idea di un accostamento estrinseco di categorie. D'altra parte Hegel si propone di descrivere la vera sintesi dialettica di due categorie in una terza portando a compimento effettivo lo schema ternario di Kant alla luce dell'insegnamento dei dialoghi "dialettici" di Platone.

L'aderenza ai generi platonici dell'*infinito* del *limite* e del *misto* assume però un rilievo ben più specifico nella dialettica dell'*infinito* qualitativo, e, con ancor maggior corrispondenza concettuale, quantitativo, con la successione: *cattiva infinità*, *limite* (che comporta di volta in volta la finitudine), e *vera infinità*, che è effettiva sintesi di infinito e di limite (quindi di finito).

Questa adesione al punto di vista platonico viene espressa da Hegel nell'*Enciclopedia* con grande chiarezza, nella Nota al paragrafo 95 (edizione del 1830), con riferimento all'*infinito* qualitativo. Egli sostiene infatti che "circa la nullità dell'antitesi intellettuale di finito ed infinito... è da considerare utilmente il *Filebo* platonico"⁴⁰. Dalle *Lezioni sulla storia della filosofia* emerge

³⁷ ROSENKRANZ, *Hegels Leben* cit., p. 105 (trad. it. p. 125).

³⁸ Il quarto genere, la causa, non ha un corrispondente nelle categorie hegeliane della "dottrina dell'essere" della *Scienza della logica* (e del "rapporto semplice" della *Logica* di Jena).

³⁹ I. KANT, *Kritik der reinen Vernunft*, 2. Auflage 1787, in I. KANT, *Werke*, Akademie-Textausgabe, Band III, Berlin 1968, p. 96; in it. *Critica della ragion pura* trad. it. di G. Gentile e G. Lombardo-Radice, rived. da V. Mathieu, con *Glossario a cura di*, ed *Introduzione* di V. Mathieu, Bari 1975, p. 117. Citiamo d'ora in poi con la sigla *Krv*, seguita dall'indicazione delle pagine e, tra parentesi, delle pagine della traduzione italiana.

⁴⁰ *Enzyklopädie*, par. 95.

il grande rilievo dedicato al *Filebo* per la precisazione del rapporto tra l'illimitato ed il limite, una delle indagini più importanti condotte nei dialoghi "dialettici". Hegel precisa che i pensieri puri, su cui insiste particolarmente l'indagine platonica, sono: "essere e non essere... l'uno e il molteplice, l'infinito (illimitato) e il limitato (limitante)".⁴¹ Hegel osserva che "nel *Filebo*... viene trattata in modo particolare questa opposizione tra l'infinito e il finito, l'illimitato e il limitante (τέλος, ὅρασις)".⁴² L'unico rilievo che viene mosso riguarda l'inadeguatezza dei termini "mescolanza", "partecipazione" e simili per rappresentare la vera unione di finito ed infinito che si ha nel terzo genere: "Gli antichi usano spesso invece della parola individualità le parole: mescolanza, partecipazione ecc. Per noi queste sono espressioni indeterminate ed imprecise"⁴³.

La maggior corrispondenza tra la dialettica hegeliana concernente l'infinito ed il limite e i primi tre generi platonici del *Filebo* si trova però, a nostro avviso, nelle pagine della *Scienza della logica* dedicate all'infinità del quanto, con particolare riferimento ai concetti matematici di grandezza, serie infinita, approssimazione infinita, funzione, esempio geometrico di Spinoza, "aggregati" di Cavalieri. L'infinito quantitativo connesso al progresso infinito del quanto corrisponde all'ὄρεσις. Ricordiamo infatti la definizione matematica di grandezza "come qualcosa che può essere aumentato o diminuito"⁴⁴; la stessa definizione, che pure viene trovata da Hegel insoddisfacente sotto il profilo formale, evidenzia il progresso infinito cui il quanto è soggetto per la sua stessa natura: progresso infinito le cui più rilevanti esemplificazioni nell'analisi superiore sono le serie infinite, le scritture decimali infinite, le approssimazioni infinite.

Queste considerazioni hegeliane corrispondono a quelle esposte da Platone nel *Filebo*. Al genere dell'infinito appartengono infatti "tutto ciò che a noi apparirà tale da venire ad essere 'più o 'meno ...'"⁴⁵, e l'infinito è ciò che per sua costituzione non ammette termine (τέλος)⁴⁶.

⁴¹ HEGEL, *Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie* II cit., p. 67.

⁴² *Ibid.*, p. 77.

⁴³ *Ibid.*, p. 78.

⁴⁴ *WdL* (1832), 175 (197).

⁴⁵ PLATONE, *Phil.*, 24 e. Ci riferiamo anche in seguito alla trad. di A. Zaidro.

⁴⁶ Cfr. *ibid.*, 24 a.

L'infinito viene così rappresentato come ciò che è quantitativamente indeterminato, poichè per sua "costituzione" è sempre soggetto al crescere ed al diminuire: il "più" ed il "meno" e simili determinazioni, "là dove inerte sono infatti non permettono che ciascuna cosa sia quantitativamente determinata, ma... realizzano in ogni modo il di più ed il di meno e vanificano la quantità determinata" ⁴⁷.

La limitazione cui, secondo Hegel, va sottoposto il progresso infinito consiste nella legge che deve essere rispettata dagli infiniti elementi della moltitudine. In questo caso dobbiamo considerare la legge diversamente da come è stato fatto prima, in modo astratto, indipendente dagli elementi che vi sono sottoposti: potremmo dire che essa consiste nell'astratto "schema" che lega tra loro delle "variabili", es.: $y = ax^2$ e nelle eventuali altre condizioni loro imposte, senza aver riguardo degli elementi che entrano in relazione (nel caso dell'esempio di Spinoza la limitazione consiste i) nell'effettiva limitazione dello spazio in cui si trovano i segmenti; ii) nella modalità di costruzione dei segmenti stessi).

Anche in questo caso riscontriamo una notevole corrispondenza con il *Filebo*. Platone afferma infatti che nel genere del *limite* rientrano "l'uguale" e l'uguaglianza e dopo l'uguale il 'doppio' e tutto ciò che è numero al numero e misura in relazione alla misura" ⁴⁸. Quella del limite è la famiglia "cui appartengono l'uguale" e il 'doppio' e tutto ciò che fa cessare la reciproca discordanza degli opposti e li rende commensurabili e li armonizza ponendo fra di loro il numero" ⁴⁹.

A questo proposito ci pare opportuno ricordare che l'indagine dialettica condotta da Socrate mostra che il piacere rientra nel genere dell'infinito. Proprio per il fatto che esso non ha limite alcuno, e ciò genera intemperanza e malvagità, "la dea... impone una legge ed un ordinamento comportanti limitazioni" ⁵⁰.

Hegel fa propria la logica sottesa dal discorso socratico sulla necessità della legge, che nel testo platonico viene esemplificata matematicamente come "tutto ciò che è numero al numero e misura in relazione alla misura", precisando che la vera infinità del quanto si ha, come abbiamo visto, quando mediante una legge si

dà ordine e limite alla variabilità del quanto stesso, togliendolo dall'indeterminatezza del progresso infinito, e permettendone la comprensione unitaria, come accade negli esempi matematici che già abbiamo preso in considerazione. Questa vera infinità del quanto ci sembra corrispondere al "genere misto" di cui parla Platone, unione di *infinito* e di *limite*. Nel *Filebo* si afferma che dalla mescolanza tra l'infinito ed il limite "risulta l'origine di nuove realtà per ogni singola unione" ⁵¹, il genere misto. Precisa Socrate: "io affermo che terzo, questa unità in cui io pongo la somma di tutto ciò che è generato dalla congiunzione di quelli, è la generazione all'essere che si ottiene dalle misure fondate sul genere del limite" ⁵².

Egli precisa inoltre che il genere misto "è il genere di tutti gli elementi infiniti i quali sono stati legati dal limite" ⁵³. L'affermazione hegeliana che "l'infinito matematico ha veramente tolto o assorbito in sé il limite finito" ⁵⁴ ci sembra rappresentare anche una profonda meditazione sulla conclusione di Socrate sulla natura del terzo genere dell'essere. Più in generale tutto lo schema argomentativo di Hegel sulla dialettica dell'infinità del quanto, ossia della grandezza matematica, risulta costruito in modo congruo alla trattazione dei primi tre generi dell'essere nel *Filebo*.

Questo tema è ritenuto da Hegel di importanza fondamentale per la sua filosofia. Ciò viene confermato dal fatto che nella redazione del 1831 della *Scienza della logica* egli non solo mantiene sulla questione lo stesso punto di vista sostenuto nell'edizione del 1812, ma trova altresì necessario ampliarne ulteriormente l'esposizione nella terza Nota sull'infinito matematico. In questa Nota in cui Hegel prende in particolare considerazione il pensiero del matematico Bonaventura Cavalieri, il tema della moltitudine infinita si interseca con quello della "composizione del continuo" e della misura del continuo. Ne emerge, come vedremo, una profonda analisi del tema dell'infinito potenziale ed attuale, e del continuo, che si collega alle osservazioni espresse da Hegel in precedenza a questo riguardo sui punti di vista di Aristotele, Bayle, Spinoza e Kant e della matematica moderna ⁵⁵.

⁴⁷ *Ivi*, 24 c.

⁴⁸ *Ivi*, 25 a.

⁴⁹ *Ivi*, 25 e.

⁵⁰ *Ivi*, 26 b.

⁵¹ *Ivi*, 25 e.

⁵² *Ivi*, 26 d.

⁵³ *Ivi*, 27 d. Modifichiamo la trad. di A. Zado.

⁵⁴ *WDL* (1832), 247 (274).

⁵⁵ Cfr. *infra*, cap. III.

5. La grandezza infinitesima e la contraddizione. L'influsso del "Parmenide" di Platone nella riflessione hegeliana sull'"evanescente".

Nella prima Nota sull'infinito matematico Hegel, come abbiamo visto, trova che la vera infinità del quanto si ha nei concetti matematici di funzione/relazione e nell'esempio spinoziano di moltitudine *actu* infinita. Egli accoglie anche il concetto di infinitesimale: anche se egli critica la sua rappresentazione sotto forma di *quanto*, evidenziata in modo particolare dal metodo leibniziano, egli apprezza la concezione di una grandezza non nulla, *in atto* minore di ogni altra grandezza data. Particolarmente importanti sono poi per Hegel le interpretazioni di Newton dell'infinitesimale come *evanescente* e come *momento*. Secondo Hegel grandezze di questo tipo contravvengono i principi logico-formali di identità, non contraddizione, terzo escluso, e non rappresentano più grandezze ordinarie, ma determinazioni qualitative della grandezza. Anche se qualitativamente non ci è permesso di avere la loro determinazione assoluta, tuttavia possiamo avere la loro determinazione relativa, ad esempio del tipo $(dy/dx) = 1/2$, ed il calcolo infinitesimale evidenzia la copia dei risultati ottenibili con queste grandezze, la loro importanza, e la complessiva coerenza di questi risultati.

In generale Hegel afferma che l'*infinito* "è la contraddizione quale appare nella sfera dell'essere"⁵⁶, ed abbiamo già rilevato che lo stesso progresso infinito è l'espressione della contraddizione, ed il vero infinito la sua soluzione. La contraddizione era però presente anche nelle sistemazioni dell'analisi superiore in cui si faceva ricorso agli infinitesimi/evanescenti, e questo accoglimento della contraddizione in matematica, che permetteva di ottenere risultati complessivamente coerenti, è per Hegel oggetto di grande interesse dal punto di vista speculativo.

I vari metodi di calcolo caratterizzavano poi le grandezze infinitesime mediante la contraddizione: così ad esempio Leibniz afferma: "je compte pour égales les quantités dont la différence leur est incomparable. J'appelle *grandsurs incomparables* dont l'une multipliée par quelque nombre fini que ce soit, ne sçaurait

⁵⁶ WdL (1812-13), 287 (491).

excéder l'autre"⁵⁷: se $A \neq A'$, e $A - A' = \alpha$ è infinitesimo, si considera $\alpha = 0$, pertanto $\alpha \neq 0$ & $\alpha = 0$. In questa, ed in analoghe proposizioni del calcolo infinitesimale, possiamo rilevare "a glaring contradiction", come osserva il logico A. Robinson, fondatore dell'*analisi non-standard*, poiché "the infinitesimal difference between two quantities may, at the same time, be both equal to, and different from zero"⁵⁸. Una simile proposizione viene assunta come primo postulato nell'*Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes* di L'Hospital⁵⁹. Questa proposizione, o altre ad essa equivalenti, come $A + \alpha = A$, se α è infinitesimo rispetto ad A , venivano poi utilizzate nel corso del calcolo.

Analogamente in Newton l'assunzione che l'evanescente fosse sia eguale a zero, sia diverso da zero, veniva poi utilizzata nel corso del procedimento deduttivo. Così, per ottenere il rapporto y/x tra le flussioni delle quantità fluenti y , x (rapporto corrispondente al rapporto differenziale dy/dx), egli effettua dapprima il quoziente — modernizziamo la notazione — $(f(x)+b) - f(x)/b$ sviluppando in serie il numeratore e dividendolo per b , nell'ipotesi $b \neq 0$; in un passaggio successivo egli pone poi $b = 0$ e ottiene y/x . Si ha così il ricorso a due ipotesi contraddittorie ($b = 0$ & $b \neq 0$) nel corso dello stesso procedimento di calcolo, com'era stato acutamente osservato da Berkeley in *The Analyst*⁶⁰.

Questo ricorso alla contraddizione nel calcolo infinitesimale viene messo in evidenza da Hegel in più riprese. Nella *Scienza della logica* dell'edizione 1812-16 Hegel osserva che la *matematica superiore* "si avvanza anche fino all'infinito e si permette delle contraddizioni"⁶¹. La 1^a nota sull'infinito della *Scienza della logica* del 1831 riprende le considerazioni del 1812, rilevando ad

⁵⁷ G.W. LEIBNIZ, *Leibniz an de l'Hospital* (14/24 Juin 1695), in *Mathematische Schriften*, hrsg. v. C.I. GERHARDT, Band II, Hildesheim 1962, p. 288.

⁵⁸ A. ROBINSON, *Non-standard Analysis*, Amsterdam-London 1970, p. 265.

⁵⁹ Cf. G.F.A. DE L'HOSPITAL, *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*, Paris 1696, pp. 1-4 (sui postulati dell'analisi).

⁶⁰ Si veda L. NEWTON, *Tractatus de quadratura curvarum*, in *Opera quae extant omnia*, Faksimile-Neudruck der Ausgabe von S. HORSLEY, London 1779-1785 in fünf Bänden, Band I, Stuttgart 1964, pp. 336-337. Cf. G. BERKELEY, *The Analyst*, in *The Works of George Berkeley*, ed. by A.C. FRASER, vol. III, Oxford 1901, par. 16.

⁶¹ WdL (1816), 47 (699).

esempio che la matematica "nel metodo del suo infinito ... trova la *contraddizione capitale nel metodo particolare* stesso sul quale, come scienza, in generale riposa"⁶²; e che la matematica dell'infinito "force una determinazione presa di là [nella matematica "ordinaria"] e da lei trattata, riducendola all'*identità colla determinazione opposta* (come per esempio riduce una linea curva ad una retta, il circolo ad un poligono, ecc.). Le operazioni che la matematica si permette come calcolo differenziale e integrale contraddicono quindi interamente alla natura delle determinazioni semplicemente finite ed alle loro relazioni, e non potrebbe pertanto avere una giustificazione altro che nel concetto"⁶³.

D'altra parte Hegel è anche consapevole che i risultati ottenuti con il calcolo infinitesimale concordano con quelli ottenuti col "metodo geometrico" (metodo di esaurizione): gli analitici mostrano, "confrontando il risultato che si ottiene col rigoroso procedimento geometrico, con quello che si ottiene seguendo il metodo delle differenze infinitesime, che l'uno di essi è il medesimo che l'altro, e che non vi ha assolutamente luogo un più o un meno di precisione"⁶⁴.

Queste considerazioni sulla contraddizione relativa alle grandezze infinitesime/evanescenti dell'analisi infinitesimale trovano ulteriore svolgimento nelle considerazioni hegeliane sul *moto*; più in generale esse rivelano la loro importanza anche ai fini della comprensione della natura del *divenire*.

Con riferimento al moto Hegel osserva che: "qualcosa si muove, non in quanto in questo Ora è qui, e in un altro Ora è là, ma solo in quanto in un unico e medesimo Ora è qui e non qui, in quanto in pari tempo è e non è in questo Qui"⁶⁵. Indubbiamente la riflessione hegeliana sulla contraddizione del movimento prende le mosse dal pensiero antico: "Si debbon concedere agli antichi dialettici le contraddizioni ch'essi rilevano nel moto, ma da ciò non segue che pertanto il moto non sia, sibbene anzi che il moto è la contraddizione stessa della forma dell'esserci"⁶⁶.

Dalle pagine hegeliane vediamo che il tempo viene corretta-

⁶² WdL (1832), 237 (265). Cfr. WdL (1812-13), 154.

⁶³ WdL (1832), 251-252 (280).

⁶⁴ Ivi, 256 (286).

⁶⁵ WdL (1812-13), 287 (491).

⁶⁶ Ivi, 287 (491).

mente inteso se il punto temporale non viene considerato come un limite "statico", ma come un limite "dinamico", analogo all' "infinitesimo intensivo", in generale alle grandezze evanescenti dell'analisi. In questo senso nella Nota della *Scienza della logica* sull'antinomia kantiana del limite del tempo e dello spazio egli osserva che "il *punto temporale*, che la dimostrazione [kantiana] impiega e dove il tempo dovrebbe essere interrotto, non è anzi altri che il *loglientesi* esser per sé dell'*ora*"⁶⁷.

Nell'*Enciclopedia* del 1830 egli precisa: "Il tempo è l'essere che, mentre è, non è, e mentre non è, è; il divenire *intuito*; il che vuol dire che le differenze semplicemente *momentanee*, ossia che si negano immediatamente, sono determinate quali differenze *estrinseche*, cioè esterne a se stesse"⁶⁸, con un esplicito richiamo all'infinitesimale (*differenze momentanee*). A nostro avviso è estremamente significativo il fatto che Hegel trovi opportuno esemplificare il divenire, contraddittoria unità di essere e di non-essere, proprio con le grandezze evanescenti dell'analisi, sia nell'edizione del 1812, sia nella redazione del 1831. Parafrasando Newton, Hegel spiega che le *grandezze infinitamente piccole* "venner determinate come tali che sono nel loro sparire, non prima del loro sparire (perché allora sono grandezze finite), né dopo il loro sparire (perché allora non son nulla)"⁶⁹. Come nel caso del divenire la "dialettica ordinaria", ossia "la dialettica adoprata dall'intelletto", nega l'unità dell'essere e del non-essere, nel caso delle grandezze evanescenti essa afferma "che fra l'essere e il non essere non si dà uno *stato medio*". Però "la matematica deve i suoi più brillanti successi all'aver ammesso quella determinazione del concetto di grandezza evanescente proprio per giustificare lo *stato intermedio* tra l'essere e il nulla"⁷⁰. Ed abbiamo altresì visto che nell'*Enciclopedia* a proposito del tempo egli parla di "differenze momentanee". Il concetto di evanescente viene pertanto accolto da Hegel in tutte e due le redazioni della dottrina dell'essere della *Scienza della logica*, così come viene accolto nell'*Enci-*

⁶⁷ WdL (1832), 230 (258).

⁶⁸ *Enzyklopädie*, par. 258.

⁶⁹ WdL (1832), 91-92 (97).

⁷⁰ Ivi, 92 (97). In WdL (1812-13) queste considerazioni sul divenire e le grandezze evanescenti si trovano alle pp. 55-56.

⁷¹ WdL (1832), 252 (280-281). Cfr. WdL (1812-13), 165.

chopedia del 1830 con riferimento all'istante, al divenire, alla contraddizione.

Come il *Filebo* ci dà un'importante chiave interpretativa per la comprensione delle tematiche relative alla moltitudine infinita, allo stesso modo un altro dialogo dialettico di Platone, ossia il *Parmenide*, ci fornisce una delle chiavi di lettura della problematica hegeliana relativa all'infinitesimale e alla contraddizione. Come è noto, la "terza ipotesi" del *Parmenide*: "se l'uno è e non è", conduce all'esame della natura dell'istante; e questa natura si mostra connessa con il problema del cambiamento e del divenire⁷².

Senza avventurarci nei problemi interpretativi del *Parmenide*, ci è sufficiente rilevare l'influsso che il testo di Platone può aver esercitato sulla riflessione hegeliana sul concetto di infinito e di evanescente proposto dall'analisi superiore.

Infatti Hegel osserva che le grandezze evanescenti dell'analisi stanno in uno "stato medio" tra l'essere e il non essere, contravvenendo in tal modo ai principi logici di identità, contraddizione e terzo escluso. In questo fatto riscontriamo una profonda affinità con l'osservazione di Platone, che nell'*istante* (τὸ ἔξαίρων)⁷³ l'uno "potrà partecipare di ambedue le condizioni" opposte, sicché allora esso "né è, né non è"⁷⁴.

Abbiamo anche visto che nello sviluppo delle considerazioni hegeliane l'assunzione della contraddizione esplica la stessa natura del movimento, ed è alla radice stessa del divenire. Tra l'altro Hegel sostiene che qualcosa si muove "solo in quanto in un unico e medesimo Ora è qui e non qui"⁷⁵.

Tutto ciò trova corrispondenza con il testo platonico. Infatti nel dialogo *Parmenide* afferma che quando l'uno muta, il mutamento non può avvenire né quando è in moto né quando è fermo, né quando è "nel tempo", poiché nel tempo esso sarà o fermo o in moto⁷⁶. Ma il mutamento c'è, pertanto "ci sarà questa cosa assurda in cui esso è allora quando muta", costituita dall'i-

⁷² PLATONE, *Parm.* 155 e - 157 b. A questo riguardo cf. CHIEREGHIN, *In-contraddittoria e contraddizione* cit., p. 265.

⁷³ PLATONE, *Parm.* 156 e.

⁷⁴ *Ivi*, 157 a. (trad. it. modificata).

⁷⁵ *WdL* (1812-13), 287 (491).

⁷⁶ PLATONE, *Parm.*, 156 d.

stante. Parmenide ricorda che il significato dell'*istante* pare consista in "ciò da cui qualche cosa muove verso l'una o l'altra delle due condizioni opposte"⁷⁷, e prosegue fornendo anche la definizione dell'*istante* mediante la seguente descrizione: "Non vi è un mutamento infatti che si inizi dalla quiete ancora immobile né dal movimento ancora in moto, ma questa natura dell'istante è qualche cosa di assurdo che giace tra la quiete ed il moto, al di fuori di ogni tempo, e così verso l'istante e dall'istante ciò che si muove si muta nello stare e ciò che sta si muta nel muoversi"⁷⁸. In modo analogo negli altri tipi di mutamento l'uno, allorché muta "né è né non è, né viene all'essere né perisce"⁷⁹.

Nelle *Lezioni sulla storia della filosofia*, proprio riferendosi al *Parmenide*, Hegel osserva che "nel divenire vi è l'essere e il non essere; la verità di entrambi è il divenire, esso è l'unità di entrambi come inseparabili, e tuttavia anche come differenti"⁸⁰. Alla luce delle precedenti osservazioni ci sembra che l'indicazione del testo delle *Lezioni*, pur con le opportune cautele, dovute alla modalità della sua costituzione, sia suscettibile di un importante riferimento nelle considerazioni di Platone sulla natura dell'istante.

6. Conclusione.

Abbiamo così visto, con particolare riferimento alla 1^a Nota sull'infinito matematico che l'esame delle proposte del calcolo infinitesimale nell'era moderna serve ad Hegel per avere indicazioni di estrema rilevanza sul piano speculativo. Infatti le serie infinite da un lato, il concetto intuitivo di insieme e di funzione con dominio infinito dall'altro, illustrano la dialettica che conduce dal progresso infinito al vero infinito.

È abbastanza agevole rendersi conto che queste considerazioni non avvengono nel solo ambito della problematica moderna, matematica e filosofica, sull'infinito. Hegel vuole esporre il suo punto di vista su di un problema su cui la filosofia greca si è

⁷⁷ *Ivi*, 56 d.

⁷⁸ *Ivi*, 156 d-e.

⁷⁹ *Ivi*, 157 a.

⁸⁰ HEGEL, *Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie* II, cit. p. 82.

confrontata sin dalle sue origini, trattando dell'infinito, del limite, del limitato.

La concezione hegeliana su tali questioni corrisponde alla proposta platonica, contenuta nel *Filebo*, sui primi tre generi dell'essere: l'infinito, il limite, il genere misto. La matematica moderna avrebbe così elaborato alcuni concetti, che, pur essendo formulati nel modo proprio all'intelletto, hanno tuttavia al fondo una radice speculativa corrispondente alla proposta platonica del *Filebo*. Lo stesso Hegel indica chiaramente l'importanza di questo dialogo platonico per superare l'antitesi finito-infinito.

Lo schema platonico ispira in modo particolare la *dialettica del quanto* svolta nella sezione "Quantità", con le sue esemplificazioni matematiche. Più in generale esso conforma a sé tutta la strutturazione della logica dell'essere, anche nella successione categoriale della *qualità*, della *quantità* e della *misura*.

Oltre a ciò l'analisi del concetto di grandezza evanescente, della sua interpretazione mediante la contraddizione, delle sue connessioni con il concetto del divenire e con la spiegazione del movimento, risulta chiaramente ispirata, a nostro avviso, alla lettura della trattazione della natura dell'istante, svolta da Platone nel *Parmenide*.

Questo ci sembra l'aspetto speculativamente più rilevante delle considerazioni hegeliane sulla *matematica dell'infinito*. Mediante la riflessione sull'analisi superiore Hegel riproponeva l'attualità di alcuni concetti contenuti nei "dialoghi dialettici" di Platone, cercando non tanto le espressioni inevitabilmente intellettualistiche di alcune nozioni della matematica, quanto piuttosto la profondità del concetto in esse contenuto.

CAPITOLO II

I LIMITI POSTI DAL METODO MATEMATICO ALL'INTUIZIONE DELL'INFINITO. IL "CALCOLO DELLE FUNZIONI" DI LAGRANGE

1. Introduzione.

Pur avendo intuito il contenuto speculativo di alcune sue importanti determinazioni, l'analisi superiore va tuttavia incontro a notevoli difficoltà nella trattazione delle medesime.

Questo accade, da un lato, perché la matematica, se vuol mantenere il suo statuto di scienza del finito, ammettendo al massimo l'infinito potenziale, non è in grado di portare a compimento con rigore i "processi infiniti", come accade per la definizione della somma di una serie e per il concetto di limite.

D'altra parte essa non è in grado di trattare in modo adeguato l'aspetto concettuale della questione, perché la sua struttura metodologica corrisponde alla logica dell'intelletto e non a quella della ragione.

L'unica "via scientifica" percorribile dalla matematica, secondo Hegel, sembra essere quella proposta da Lagrange con il "calcolo delle funzioni". In essa si ha una trattazione inevitabilmente "intellettualistica" dei concetti dell'infinito matematico, e si è al di fuori delle difficoltà riscontrate nella definizione della somma della serie e del limite.

Sia per la sua concezione della matematica, sia per favorire la comprensione delle applicazioni del "calcolo delle funzioni", Hegel introduce notevoli semplificazioni alla teoria lagrangiana, limitando l'ambito delle funzioni in esame alle funzioni algebriche razionali. Ciò non toglie che, secondo Hegel, il punto di vi-

sta corretto per l'analisi superiore sia proprio quello esposto da Lagrange nella *Théorie des fonctions analytiques* e nelle *Leçons sur le calcul des fonctions* con riferimento all'"operazione" di *dérivation* di una funzione, ed alla sua inversa, la ricerca delle *fonctions primitives* di una funzione¹.

2. Le serie infinite. Le approssimazioni infinite, le scritture decimali illimitate.

Il nucleo della critica hegeliana alle serie infinite, alle scritture decimali illimitate, alle approssimazioni infinite, è già stato accennato nel precedente capitolo: si tratta di espressioni del progresso infinito. L'obiezione che Hegel muove a questi processi non è di essere formalmente scorretti, ma di essere inadeguati a rappresentare alcunché. Per comprendere meglio questa circostanza, prenderemo in considerazione per prima cosa le serie di funzioni, ottenendo in questo modo informazioni anche per le scritture decimali e per le approssimazioni infinite.

Una serie di funzioni è una scrittura del tipo $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$, dove le $f_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$, sono funzioni aventi lo stesso dominio. Nell'analisi superiore ci si era ben presto accorti delle difficoltà insite in una scrittura del tipo $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$: non ci si può infatti servire della nozione ordinaria di somma, poichè questa si riferisce ad un numero finito di termini.

Si precisava così in modo intuitivo la nozione di *convergenza* di una serie, che ora illustreremo ricorrendo per comodità ad una terminologia e ad una formulazione a noi più prossime: considerata la "ridotta n -esima" $s_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x)$, la serie converge verso $f(x)$ se, posto $r_n(x) = f(x) - s_n(x)$ (resto n -esimo), "quanto più n diventa grande, tanto più $r_n(x)$ si avvicina a zero". La difficoltà sta tutta nel precisare in modo rigoroso cosa si-

¹ J.-L. LAGRANGE, *Théorie des fonctions analytiques, contenant les Principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions et réduites à l'analyse algébrique des quantités finies*, quatrième édition réimprimée d'après la deuxième édition de 1813, in *Oeuvres*, publiées par les soins de J.-A. SERRET, Tome IX, Paris 1881; J.-L. LAGRANGE, *Leçons sur le calcul des fonctions*, troisième édition réimprimée d'après la deuxième édition de 1806, in *Oeuvres* cit., Paris 1884.

gnifichi quel "... quanto più ... tanto più ...", che diverrà chiaro solo dopo la definizione di limite dell'analisi classica (Heine, Weierstrass). In questa situazione una scrittura del tipo $f(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x) + \dots$ risultava in generale falsa, per qualunque n , ed una scrittura del tipo $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$, accettata dai matematici (ad esempio Eulero) quando la serie convergeva, non viene considerata accettabile da Hegel perchè eguaglia un valore determinato ad una quantità non determinata: $f_1(x) + f_2(x) + \dots$ è l'espressione di un "progresso infinito", che non può mai "raggiungere" $f(x)$. L'osservazione di Hegel risultava quanto mai pertinente, dal momento che il concetto di limite non risultava ancora formulato in modo rigoroso (nemmeno con la definizione di Cauchy)².

Non è necessario, a questo punto dilungarsi sulle scritture decimali illimitate, come 0,285714..., espressione decimale della frazione $2/7$ (esempio di Hegel). Infatti l'espressione decimale corrisponde alla serie $0/1 + 2/10 + 8/100 + 5/1000 + 7/10000 + \dots$ ³.

Quanto poi alla nozione dell'approssimazione infinita, l'esempio già considerato nel I capitolo, della dicotomia infinita del segmento AB ce ne fornisce una illustrazione, con la successione dei punti $M_1, M_2, M_3, \dots$, convergente verso B . Più in generale la successione delle ridotte $s_1(x), s_2(x), s_3(x), \dots$, fornisce un esempio di approssimazione infinita verso $f(x)$, nel caso in cui la serie sia convergente.

3. Il metodo dei limiti.

Nella *Scienza della logica* del 1831 Hegel porta una critica molto pertinente al cosiddetto "metodo dei limiti", sostenuto da

² Cf. A.L. CAUCHY, *Résumé des Leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal*, in *Oeuvres complètes*, II^e série, Tome IV, Paris 1899, pp. 13, 16: "lorsque les valeurs successivement attribuées à une variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres", nel caso in cui questi valori "décroissent indéfiniment de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un *infiniment petit* ou une quantité infiniment petite"; "une variable de cette espèce a zéro pur limite".

³ WAL (1832), 243 (271).

molti matematici, tra i quali ricordiamo in modo particolare Newton, D'Alembert, L'Huilier, Lacroix, Cauchy.

Nell'edizione del 1812 Hegel si era riferito in modo particolare a L'Huilier, che invece nella redazione del 1831 non viene nominato. Poiché in questa redazione Hegel prende in considerazione l'articolo di Dirksen⁴, contenente una recensione del *Résumé* di Cauchy, ove sono riportate varie importanti definizioni di Cauchy, tra cui quella del limite e della derivata, è naturale porsi la domanda se la critica di Hegel sia rivolta proprio a Cauchy⁵.

Noi riteniamo che la critica di Hegel investa in generale le varie proposte sul *metodo dei limiti*, ed in questo senso vi rientra pertanto anche Cauchy. Però la strutturazione del discorso hegeliano riguarda a nostro avviso più da vicino le esposizioni di D'Alembert e di Lacroix. In particolare Hegel sembra aver preso in considerazione il *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, tome premier, Paris 1797, di Lacroix (Chap. 1, "Méthode des limites"), testo che faceva parte della sua biblioteca⁶.

Il problema è di determinare il coefficiente differenziale dy/dx di una funzione y della variabile x (nel *Traité* si considera la funzione u di x). Le considerazioni di Lacroix, che trovano riscontro nel testo hegeliano sono le seguenti: se x diventa $x + b$, y diventa $y + pb + qb^2 + rb^3 + \dots$, quindi all'incremento b dell'ar-

⁴ Si veda l'articolo del matematico E.H. Dirksen, in *Jahrbücher für wissenschaftliche Kritik*, N.ro 53-160, August 1827, colonne 1217-1271 (citato d'ora in poi con Dirksen). L'articolo contiene una introduzione sulla storia del calcolo infinitesimale da Leibniz a Lagrange, e le recensioni a F.W. SPEHR, *Neue Principien des Fluenrencalculs*, Braunschweig 1826, e a CAUCHY, *Résumé* cit.

⁵ M. Wolff, nel suo interessante articolo *Hegel und Cauchy. Eine Untersuchung zur Philosophie und Geschichte der Mathematik*, in *Hegels Philosophie der Natur*, hrsg. v. R.P. HORSTMANN u. M.J. PETRY, Stuttgart 1986, pp. 197-263, cerca di dimostrare un riferimento privilegiato di Hegel nei confronti di Cauchy, per quel che riguarda la teoria dei limiti. Questa circostanza non è però confortata dal testo hegeliano, né corrisponde allo spirito che ispira il *Résumé* (e prima ancora l'*Analyse algèbrique* del 1821) di Cauchy, il quale si proponeva di esporre la teoria dei limiti indipendentemente dalla teoria delle serie (e non di determinare il limite di un quoziente differenziale mediante uno sviluppo in serie, come invece si verifica nel testo hegeliano). Cfr. le note seguenti.

⁶ S.F. LACROIX, *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, tome premier, Paris 1797, Chap. 1: "Méthode des limites", pp. 189 sgg.

Per ciò che riguarda la biblioteca di Hegel cfr. *Verzeichniss der von dem Professor Herrn Dr. Hegel ... hinterlassenen Bücher-Sammlung*, Berlin 1832 (ringraziamo lo Hegel-Archiv di Bochum che ci ha permesso di documentarci su ciò).

gomento corrisponde l'incremento $k = pb + qb^2 + rb^3 + \dots$; si avrà pertanto $k/b = p + qb + rb^2 + \dots$ (questo richiede però $b \neq 0$).

A questo punto Lacroix osserva: se b e k "s'évanouissent, le second membre de cette équation ne s'évanouit pas, mais il se réduit seulement à p , quantité qui est la limite du rapport des deux accroissements k et b , ... et qui exprime aussi le premier coefficient différentiel de la fonction u ", vale a dire dy/dx .

Ma il problema è proprio quello di spiegare cosa succede quando b e k svaniscono. Infatti se si pone $b = 0$, da un lato si contraddice la precedente ipotesi $b \neq 0$ (procedimento che naturalmente nella matematica ordinaria non è ammesso). Dall'altro si ottiene l'uguaglianza $0/0 = p$, incorrendo nelle stesse obiezioni cui va soggetta la proposta di Eulero di interpretare gli infinitesimi come zeri, dal momento che il rapporto $0/0$ è una forma indeterminata, ossia può assumere qualsiasi valore numerico⁸.

E' necessario specificare allora che p è il valore cui il rapporto k/b può avvicinarsi indefinitamente: "la limite d'un rapport n'est point le rapport lui-même, mais une quantité dont il peut approcher d'aussi près qu'on voudra"⁹. Questa è in generale la risposta dei sostenitori del metodo dei limiti, che viene riportata da Hegel in questo modo: " p dev'essere ... quel valore determinato, a cui il rapporto si può avvicinare infinitamente, cioè in modo che la differenza possa diventare più piccola di qualsiasi differenza data"¹⁰.

In questo modo però, con il ricorso alla categoria dell'approssimazione infinita non si è in grado di concludere con la determinazione di p . D'altra parte è chiaro che una differenza quantitativa "che ha la determinazione non solo di poter essere, ma di dover essere, più piccola di qualsiasi differenza data"¹¹ (in altri termini una grandezza infinitesima in atto), non è più una differenza quantitativa. Ma allora non può venir trattata dalla

⁷ LACROIX, *Traité* cit., p. 189.

⁸ Cfr. LEONHARDI EULERI *Institutiones calculi differentialis*, editi G. KO-WALEWSKI, in *Opera omnia*, edenda curaverunt F. RUDIO, A. KRAZER, P. STAECKEL, series I, vol. X, p. 3; cfr. inoltre ivi, "Praefatio" e "Caput III". Per le osservazioni di Hegel si veda WdL (1832), 257 sgg. (277 sgg.).

⁹ LACROIX, *Traité* cit., p. 192.

¹⁰ WdL (1832), 266 (298). Anche la definizione di Cauchy del limite rientra in questa descrizione.

¹¹ *Ivi*, 266 (298).

matematica, se è un infinitesimo non nullo. E se si considera come nullo, si ritorna nell'indeterminazione della forma $0/0$.

4. L'integrale secondo il metodo leibniziano.

Nella redazione del 1831 della *Scienza della logica* l'interesse di Hegel si estende anche al calcolo integrale (appena accennato nella edizione del 1812).

Per il problema della *quadratura* (ad esempio) il calcolo di impostazione leibniziana si proponeva di determinare l'area di un *trapezoide* $ABCD$ (superficie compresa tra un arco di curva di equazione $y = f(x)$ continua per $a \leq x \leq b$) come *somma* degli infiniti elementi d'area infinitesimi dati dai rettangoli di altezza $f(x)$ e di base dx (in formula $\text{Area} = \int_a^b f(x)dx$, in notazione di integrale definito). Lo stesso simbolo di integrale, $\int$, introdotto da Leibniz, è una "s" stilizzata, abbreviazione di "summa".

Naturalmente in questo modo si va incontro alle stesse difficoltà incontrate nel definire la somma della serie, poiché si deve definire la somma di una serie di infiniti termini infinitesimi. Osserva Hegel a questo riguardo che, intendendo il calcolo integrale "come un *metodo di addizionamento*, secondo ch'era stato denominato per opposizione contro il differenziare, dove l'incremento vale come l'elemento essenziale", per questo fatto "esso appartiva anche essenzialmente connesso colla forma della serie"¹². Si viene così indirettamente rinviati alle considerazioni sulla somma della serie.

Pertanto sia il problema della determinazione del limite di una data funzione (Hegel considera il limite di un rapporto incrementale), sia il problema dell'integrazione legato alla definizione leibniziana dell'integrale, non sono risolvibili se si rimane dentro ad una concezione puramente potenziale della grandezza, in quanto si va incontro ad una approssimazione infinita che non dà mai luogo alla determinazione della grandezza cercata.

5. L'inadeguatezza del formalismo per rappresentare l'infinito.

Hegel osserva nella *Scienza della logica* (nella Nota: "Le ordinarie specie dei concetti") che la *matematica superiore*, "che si avvanza fino all'infinito e si permette delle contraddizioni, non può più adoperare per l'espressione di codeste determinazioni i segni da lei adoprati altrove"¹³, vale a dire i simboli usati nell'ambito del finito.

Questo accade già quando essa rappresenta graficamente la *differenza infinita* di due ordinate come due segmenti paralleli e distinti, o quando, per esprimere un arco di curva come una spezzata poligonale di infiniti lati infinitesimi, essa disegna invece una spezzata poligonale ordinaria (ad es., con i vertici sull'arco): in questo modo essa "per l'infinito, di cui così si tratta, rimanda alla *rappresentazione* (*Vorstellung*)"¹⁴. Si ricorre così ad una maniera sensibile di esprimere i concetti, dal momento che "le rappresentazioni in genere possono essere considerate come *metafore* dei pensieri e concetti"¹⁵.

La situazione diventa però molto più grave quando si utilizza una rappresentazione finita per l'infinitamente piccolo non tanto nell'esposizione sensibile del concetto, quanto piuttosto nell'effettivo procedimento di calcolo. Intendendo infatti l'infinitamente piccolo come un "piccolo relativo", hanno infatti origine quei procedimenti di *approssimazione* per cui si trascurano i differenziali degli ordini superiori nei confronti dei differenziali degli ordini inferiori e delle grandezze ordinarie. Per far questo il calcolo viene tutto ricondotto al finito (i differenziali sono grandezze finite "relativamente piccole").

Ricorrono a questo punto di vista "*Leibnitz* e i successori ed anche *Eulero*"¹⁶ (tra i successori ricordiamo Wolff). Questa approssimazione, "col vantaggio della comodità" che essa permette, perchè poi con i differenziali si può operare con regole semplici, "dà a questo calcolo l'apparenza d'imprecisione e addirittura

¹³ *WdL* (1816), 47 (699).

¹⁴ *Ist*, 47 (699).

¹⁵ *Enzyklopädie*, par. 3.

¹⁶ *WdL* (1832), 260 (291). Va però ricordato che questa è una tra le interpretazioni date da Leibniz ai differenziali, che altrove interpreta come grandezze infinitesime.

Tra i "successori" di Leibniz ricordiamo Wolff: cfr. *ist*, 256 (285-286).

¹² *Ist*, 292 (329).

tura d'inesattezza nell'andamento dell'operazione"¹⁷. Tuttavia i risultati tornano esatti, e, sempre rimanendo nell'interpretazione finita, Carnot, nelle *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, giustifica questo fatto mediante un *doppio errore* commesso dai matematici nel corso del calcolo: il primo errore "sarebbe poi *compensato e corretto* con un altro errore". Osserva Hegel che la *compensazione degli errori* "è il modo di vedere in base al quale Carnot principalmente giustifica il metodo ordinario del calcolo infinitesimale"¹⁸. Hegel ha una grande stima di Carnot, ma non può fare a meno di notare che questa spiegazione, che si fonda sull'esattezza dei risultati e sull'utilità e comodità del metodo, è esteriore, e non avviene "in base alla natura della cosa stessa"¹⁹.

Anche negli sviluppi in serie delle funzioni $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$ si approssima talvolta la funzione $f(x)$ con la somma dei primi n termini $f_1(x) + \dots + f_n(x)$. In questo modo si commette ovviamente un errore, che si cerca di giustificare affermando che i termini trascurati "sono *relativamente insignificanti*" rispetto a quelli che vengono presi in considerazione arrestando lo sviluppo della serie all' n -esimo termine (come precisa Hegel con riferimento a Newton), e che "il risultato è soltanto un *approssimazione*"²⁰. Lo stesso Lagrange afferma che si possono trascurare termini della serie per la "relatività del loro quanto"²¹. Da un punto di vista quantitativo rispetto alla funzione $f(x)$ si è commesso naturalmente un errore. E' però diverso il caso se rispetto allo sviluppo della funzione $f(x)$ si trascurano dei termini "non già perchè siano insignificanti in grandezza, ma perchè sono insignificanti rispetto alla qualità"²², modo di procedere cui si attiene lo stesso Lagrange nelle applicazioni alla meccanica della teoria delle serie con riferimento alla espressione del moto rettilineo. In quei casi però in cui si approssima la funzione con un'al-

¹⁷ *Ivi*, 256 (285).

¹⁸ *Ivi*, 263-264 (295). Si veda L.N.M. CARNOT, *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, Paris 1797, trad. it. *Riflessioni di Carnot sulla metafisica del calcolo infinitesimale*, con aggiunte del cit. ing. G.B. MAGISTRINI, pubblico ripertore di matematica sublime nell'Università di Pavia, Pavia 1803, pp. 10-16.

¹⁹ *WdL*, (1832), 264 (295).

²⁰ *Ivi*, 261 (293).

²¹ *Ivi*, 265 (296).

²² *Ivi*, 265 (296).

tra, mediante considerazioni quantitative si procede in modo formalmente scorretto (fatto d'altra parte ben noto ai matematici, che avevano capito l'importanza di dare una stima dell'errore commesso).

6. Il formalismo dell'infinitamente piccolo nel calcolo differenziale e nel calcolo integrale.

L'analisi superiore è effettivamente una scienza analitica, al modo con cui Hegel intende tale nozione con riferimento all'*aritmetica* ed all'*analisi*. Queste scienze presuppongono che siano date dalle grandezze discrete, siano esse numeri o lettere che stiano al posto di numeri, e operano su di essi con le usuali operazioni del calcolo algebrico e con la relazione di uguaglianza²³.

L'analisi superiore, sia nelle impostazioni legate agli infinitesimali, sia nella proposta di Lagrange del suo calcolo con le funzioni, presenta una stretta analogia con l'ordinaria analisi. Infatti essa presuppone che sia data una relazione tra grandezze, e procede poi su questa con opportuni algoritmi: la proposta lagrangiana ritiene di essere in grado di non uscire dai procedimenti ammessi nell'algebra, poiché ottiene per via algebrica le varie *funzioni derivate* di una *funzione primitiva*: $f(x) \rightarrow f'(x) \rightarrow f''(x) \rightarrow \dots$ e ritiene di essere in grado di ridurre ogni problema alla relazione tra la funzione primitiva e le sue funzioni derivate.

Il metodo differenziale/integrale leibniziano richiede invece che sia data anche, oltre alla funzione di partenza, anche una relazione coinvolgente i differenziali.

La relazione iniziale è un dato del problema da risolvere, ad esempio l'equazione di una curva, del tipo $y = f(x)$. Come funzione, in particolare come rapporto potenziale, una relazione quantitativa contiene già per Hegel una "determinazione qualitativa delle grandezze"; ma "anche quando il conoscere analitico procede a rapporti che non sono una materia data esteriormente, ma son determinazioni di pensiero, rimane ciò nondimeno analitico, in quanto che per esso anche questi rapporti son *datti*"²⁴. Col metodo leibniziano l'analisi deve procurarsi anche una rela-

²³ Sul "conoscere analitico" cfr. *WdL* (1816), 202 sgg. (893-900).

²⁴ *Ivi*, 208 (900).

zione tra i differenziali, la qual cosa secondo Hegel viene effettuata da Leibniz in maniera poco convincente (ricordiamo la critica all'approssimazione). Una volta ammessa però questa relazione (Hegel osserva a questo proposito: "e nello stato attuale della scienza esso non è altro che una presupposizione")²⁵, anche per il metodo leibniziano "quel che vien dopo non è ad ogni modo che una serie di ordinarie operazioni analitiche"²⁶.

Queste considerazioni sull'analisi vengono proposte nella "dottrina del concetto" nel terzo volume della *Scienza della logica* pubblicato nel 1816. Per ciò che riguarda il metodo leibniziano esse si integrano bene con le osservazioni critiche espresse da Hegel nei riguardi del "formalismo dell'infinitamente piccolo", presente sia nel calcolo differenziale che nel calcolo integrale.

Hegel osserva che nel calcolo differenziale, nel problema della determinazione della tangente di una curva di equazione $y = f(x)$, in un punto $P(x, f(x))$ - dati del problema -, si ammette *al-teris* (senza produrre spiegazioni convincenti), che sussista la relazione $dy/dx = y/t$, vale a dire che il rapporto differenziale sia eguale al rapporto tra l'*ordinata* e la *sottotangente* relative al punto P . Secondo Hegel questa è "l'ammissione interamente assertiva della proporzionalità della subtangente e dell'ordinata coi cosiddetti infinitamente piccoli incrementi dell'ascissa e dell'ordinata"²⁷, una assunzione che non trova la sua giustificazione nei dati del problema.

Nel problema poi di integrazione, relativo alla "quadratura delle curve", ossia alla determinazione dell'area del trapezoide $ABCD$ delimitato dall'arco di curva CD di equazione $y = f(x)$, dal segmento di ascissa AB e dai segmenti di ordinata AD , BC , si assume che ad un trapezoide infinitesimo $EFGH$ relativo alla stessa curva, essendo x l'ascissa di E e dx la lunghezza di EF , sia $dA = f(x)dx$, (la stessa quindi del rettangolo $EFG'H$). L'area del trapezoide si ottiene integrando l'espressione differenziale data, come abbiamo già osservato in precedenza: "il prodotto", ossia $f(x)dx$, "viene ora integrato nel senso che l'integrale dia la somma degli infiniti trapezi, la superficie piana di cui si desidera la determinazione"²⁸.

²⁵ *Ivi*, 208 (900).

²⁶ *Ivi*, 208 (900).

²⁷ *WdL* (1832), 288 (324).

²⁸ *Ivi*, 294 (331).

Ricorrendo alla stessa figura, indicata con dx la lunghezza dell'arco infinitesimo HG e con dx , dy i rispettivi incrementi infinitesimi di ascissa HG , e di ordinata $G'G$, si assume che tra questi incrementi sussista la relazione pitagorica $d\bar{x}^2 = dx^2 + dy^2$. Con l'integrazione si ottiene la misura dell'arco²⁹ inteso come somma degli infiniti archi infinitesimi.

Così pure nella meccanica superiore, ad esempio nell'esposizione di Eulero, si assume che "in tempi *eguali*, infinitamente piccoli, vengano percorse con *moto uniforme* parti infinitamente piccole di una curva"³⁰ (si considera cioè l'intervallo di tempo in cui ha luogo il moto *vario* scomposto in infiniti intervalli infinitesimi eguali, in ognuno dei quali la velocità si considera come costante). Il moto, che nel suo complesso è vario, viene considerato così *uniforme* in ogni intervallo di tempo infinitesimo.

In generale il metodo analitico che ammette gli infinitesimi, deve presupporre già qualcosa sul loro comportamento. In questo modo si ha un "formalismo dell'infinitamente piccolo", perché, senza impegnarsi sulla natura effettiva della questione (la specificità del problema da trattare, i suoi dati), si fanno ipotesi sugli infinitamente piccoli, facendo valere per essi determinate relazioni³¹.

7. Le categorie formali.

Nella logica hegeliana il concetto, "quantunque astratto, ... è proprio ciò che è concreto". Esso è un'unità, i cui momenti sono l'universalità, la particolarità e la singolarità³².

L'analisi sente anch'essa l'esigenza dell'universalità, quando si preoccupa che le sue espressioni abbiano la maggior astrattezza e generalità possibile. In questo modo però essa perde di vista il lato concreto della determinazione concettuale, e si rifugia nel "formalismo".

La stessa definizione di funzione, proposta nella sua astrattezza in modo che abbia la maggiore generalità possibile (come accade

²⁹ *Ivi*, 294, 297 (331, 334).

³⁰ *Ivi*, 271 (302).

³¹ Sul "formalismo" della meccanica di Lagrange cfr *infra*.

³² Com'è noto il concetto, nella logica hegeliana, è un'unità i cui momenti sono l'universalità, la particolarità e la singolarità. Esso, "quantunque astratto, ... è proprio ciò che è concreto" (*Enzyklopädie*, par. 164).

nelle definizioni dei matematici), è affetta dal "formalismo": al fondo vi sta sì il concetto, ma la formulazione della definizione ci allontana da esso.

Queste considerazioni si chiariscono meglio, a nostro avviso, se teniamo conto delle indicazioni di Hegel sul "formalismo dell'universalità" cui l'analisi va incontro per voler generalizzare le sue definizioni. Hegel afferma che nello sviluppo di $(a+b)^n$, ossia $a^n + na^{n-1}b + \dots + nab^{n-1} + b^n$, "la sostanza della cosa è esaurita. Collo sviluppo del binomio si trova la legge; e la legge è la vera universalità". Invece nello sviluppo di $(a+b+c+d+\dots)^n$ vi è "l'estrinseca e soltanto vuota ripetizione della legge"³³. Nel primo caso la legge è maggiormente determinata che nel secondo, e quello che da un punto di vista matematico è un pregio (la maggior generalizzazione assunta dalla formula), è invece un difetto per la logica hegeliana, poichè corrisponde ad una maggiore indeterminazione, pertanto ad una minore concretezza.

In questo senso, passando dalle formule $y = x^2$ alla formula $y = x^n$, e infine alla $y = f(x)$, intendendo con la caratteristica f rappresentare una generica espressione di calcolo sulla x , quanto più guadagnano in generalità, tanto più perdiamo in concretezza.

Secondo questo punto di vista tutte le definizioni più generali che stiano alla base dell'analisi, nelle varie proposte di Newton, Leibniz, Eulero, Lagrange, Lacroix, Cauchy ecc., quali quelle di grandezze variabili, funzioni, ecc., proprio per la loro astrattezza sono affette dal *formalismo dell'universalità* (ma il discorso vale in generale per tutta la matematica)³⁴.

Hegel però va anche oltre queste considerazioni. Le categorie di grandezza variabile, funzione, ecc., sono *categorie formali*, "perché sono di una universalità nella quale quello specifico, cui s'indirizza tutto l'interesse del calcolo differenziale, non è ancora contenuto, né può esserne cavato fuori per mezzo di analisi"³⁵. E poco oltre egli aggiunge: "Queste determinazioni son *formali*, in quanto non son che categorie *general*i, le quali appunto non indicano lo *specifici*."

³³ WdL (1832), 279 (313).

³⁴ Il discorso vale per la matematica in generale, e si è sempre più accentuato con il progredire di questa scienza sino agli sviluppi dei nostri giorni (si pensi, ad esempio, alle definizioni per induzione). Si tratta di un punto di forte divergenza tra la matematica e la logica dialettica di Hegel. La prospettiva muta con le recenti proposte di formalizzazione della dialettica: cfr. *La formalizzazione della dialettica*, a cura di D. MARCONI, Torino 1979.

³⁵ WdL (1832), 277 (310).

co della cosa, che si doveva conoscere ed astrarre dalle dottrine concrete, dalle applicazioni"³⁶.

Quindi non solo si deve evitare il "formalismo dell'universalità", ma anche si deve tener conto della specificità del problema, geometrico o meccanico, in questione, e prendere in considerazione solo quei tipi di funzione che intervengono in quei problemi³⁷.

È interessante notare, che in questa critica all'astrattezza del calcolo e nel richiamo a non allontanarsi da quanto si presenta concretamente nelle applicazioni, Hegel tiene presente 1) la seconda e terza parte della *Théorie des fonctions analytiques* di Lagrange, nelle quali vengono trattate le applicazioni della teoria alla geometria ed alla meccanica; 2) il punto di vista di F. W. Spehr, riportato dalla recensione di Dirksen, che critica in Lagrange il prevalere degli sviluppi aritmetici ("ricerche puramente aritmetiche (rein arithmetische Untersuchungen)")³⁸ sulle applicazioni del calcolo; 3) la tesi di Spehr, ben diversa dal favore con cui egli giudica le proposte analitiche di Cauchy. In particolare Dirksen ritiene che "le più astratte rappresentazioni di *divenire*, *occasione di divenire*, *capacità di o tendere a mutarsi*, alle quali l'autore [Spehr] si riferisce, in luogo di *movimento*, *tempo*, *velocità* o *flussione*, di cui si servì Newton, come ci si convince facilmente, non permettono di ottenere alcuna differenza essenziale in riferimento alla scienza in oggetto"³⁹.

Ci rendiamo così conto che la critica hegeliana alla *vuota astrattezza delle categorie formali di grandezza continua o fluente, tendere, divenire, occasione di un mutamento, fluire*⁴⁰ è rivolta in modo particolare a Spehr, che esaspera la "metafisica formale" della matematica, giungendo addirittura alla *vuota tautologia* con la definizione: "Grandezza continua è ogni grandezza che vien pensata nello stato del divenire, in modo che questo divenire non accada *silvariamente*, ma con un *progresso ininterrotto*". Commenta Hegel: "Questa è

³⁶ Ivi, 299 (337).

³⁷ Questo "richiamo alla concretezza" pone però delle notevoli limitazioni alle funzioni da prendere in considerazione. Infatti, anche se fino ad un certo momento in una determinata classe di problemi si sono considerate solo funzioni di un certo tipo, non si può assolutamente escludere che in seguito non si debbano prendere in considerazione funzioni di tipo diverso.

³⁸ Cfr. Dirksen, col. 1245.

³⁹ Ivi, col. 1249.

⁴⁰ WdL (1832), 267-299 (299-310).

una definizione, che è tautologicamente lo stesso che il *definitum*"⁴¹.

In questa critica non viene pertanto coinvolta la categoria filosofica del divenire, ma la sua trasposizione formale. Sono del pari considerate come categorie formali l'infinito, l'infinita approssimazione, le grandezze variabili, continue, infinite ed altre ancora, nel modo in cui vengono in generale considerate dalla "metafisica formale" che sta alla base dei vari trattati di calcolo.⁴²

Anche prescindendo dal riferimento alle applicazioni specifiche del calcolo infinitesimale alla meccanica ed alla geometria, rimane il fatto che la generalità e l'astrazione cui mira l'analisi nuociono alla concretezza dei concetti.

8. Determinazioni numeriche e determinazioni di pensiero.

Hegel nega che i numeri e le determinazioni numeriche, come le potenze o i rapporti potenziali, possano essere messi "in luogo delle determinazioni di pensiero"⁴³. Si rimane infatti sempre nella sfera del quanto: "il rapporto potenziale esprime la determinatezza che giunge alla sua verità come la differenza qual è nel concetto, particolare del quanto, ma non qual è nel concetto come tale"⁴⁴. È questo il limite di ogni tentativo di adoperare determinazioni numeriche per esprimere concetti filosofici, tentativo rinnovato anche in tempi prossimi ad Hegel dalle filosofie di Eschenmayer, Bardili, Reinhold, Schelling, e di cui un tipico esempio è il ricorso alle potenze per le determinazioni del concetto.⁴⁵

Se poi si ricorre a queste determinazioni numeriche come a *simboli* per le determinazioni di pensiero, si ha in ogni caso una rappresentazione inadeguata per queste, poichè "nei simboli la verità è an-

⁴¹ *Ivi*, 267, 299 (299); cfr. Dirksen, coll. 1251, 1252.

⁴² Era consuetudine parlare della *metafisica del calcolo* riferendosi ai principi del calcolo stesso. In questo senso si esprimono, ad esempio, D'Alembert, Carnot, Lagrange. D'Alembert tra l'altro precisa: "À proprement parler, il n'y a point de science qui n'ait sa *métaphysique*, si on entend par ce mot les principes généraux sur lesquels une science est appuyée" (J. LE ROND D'ALEMBERT, *Essai sur les éléments de philosophie ou sur les principes des connaissances humaines avec les éclaircissements*, in *Oeuvres*, Tome I, I partie, Genève 1967, p. 294).

⁴³ *WAL* (1832), 205 (232).

⁴⁴ *Ivi*, 321 (362).

⁴⁵ *Ivi*, 321 (361).

cora *intorbidata e velata* dall'elemento sensibile. È solo nella forma del pensiero ch'essa si rivela completamente alla coscienza. Il *significato* non è che il pensiero stesso"⁴⁶.

Pertanto con le determinazioni numeriche non si è in grado di esprimere le determinazioni di pensiero. Si potrebbe pensare tuttavia che le determinazioni matematiche fossero in grado di esprimere adeguatamente almeno i concetti ad esse corrispondenti nella sfera del quanto, ad esempio, che un rapporto potenziale esprimesse adeguatamente il concetto di vera infinità quantitativa ad esso corrispondente. Ma Hegel nega recisamente anche questa possibilità: "se i numeri, le potenze, l'infinito matematico e simili s'avessero a impiegare non come simboli, ma come forme per le determinazioni filosofiche, epperò a impiegare essi stessi come forme filosofiche, allora occorrerebbe mostrare il lor significato filosofico, vale a dire la loro determinatezza concettuale. Fatto questo, son diventati essi stessi delle designazioni superflue; la determinatezza concettuale designa se stessa, e soltanto la sua designazione è la designazione giusta e conveniente"⁴⁷. E in precedenza aveva detto: "in quanto le formule matematiche significano pensieri e differenze di concetto, questo lor significato si deve anzi dichiarare, determinare e giustificare soltanto nella filosofia"⁴⁸.

Si chiarisce qui, a nostro avviso, il rapporto che sussiste tra il concetto del vero infinito quantitativo e gli esempi di infinito matematico: come già abbiamo anticipato, questi esempi non sono, né esprimono il concetto del vero infinito, ma lo posseggono come contenuto concettuale, che però è accessibile solo all'indagine filosofica.

9. Analisi superiore e metodo matematico.

Con le precedenti considerazioni abbiamo già toccato il problema del rapporto tra la matematica e la logica secondo Hegel. Senza pretendere di trattare in profondità una questione così complessa, riteniamo utile dare ancora qualche indicazione. Ci renderemo conto in questo modo della rigida *imitazione* che viene posta alla rap-

⁴⁶ *Ivi*, 207 (233).

⁴⁷ *Ivi*, 322 (363).

⁴⁸ *Ivi*, 207 (234).

presentazione adeguata del concetto dalla stessa natura del metodo analitico e sintetico, secondo i quali procede l'analisi superiore, più in generale dalla stessa natura della logica formale.

Per esprimere le sue determinazioni la matematica ricorre ai segni (numerici, letterali, geometrici, speciali; ad es. il segno ∞)⁴⁹. Ma il segno irrigidisce il concetto, facendogli perdere la sua dialettica dinamica: "Quando ora si prendano dei concetti in modo che corrispondano a tali segni, cessano di essere concetti"⁵⁰. Pertanto lo stesso esempio di Spinoza dei due cerchi, lasciato alla sola espressione grafica, non ha niente di concettuale; il simbolo ∞ , o il simbolo $1/\infty$ non rendono conto della determinatezza concettuale delle grandezze infinite; formule del tipo $y = f(x)$; $F(x, y) = 0$, anche esprimendo in maniera analiticamente più determinata il legame relationale, non danno il concetto di relazione, (e tantomeno lo esprimono le caratteristiche f, F).

Su queste formalizzazioni di determinazioni concettuali la matematica opera secondo gli schemi del metodo analitico e del metodo sintetico. Secondo Hegel il metodo dell'analisi superiore è sostanzialmente analitico, nel senso che procede partendo da determinazioni di grandezza numeriche, espresse con numeri o con lettere, che costituiscono la "materia concreta" da cui prende le mosse il conoscere analitico⁵¹. Su queste determinazioni di grandezza si interviene con le tradizionali operazioni dell'algebra e con la relazione di uguaglianza (e di disuguaglianza).

La relazione di uguaglianza risulta "regolata" dal *sillogismo quantitativo o matematico*: "quando due cose sono *eguali* ad una terza, sono eguali tra loro": è il sillogismo alla cui base sta "l'identità intellettuale estrinseca, l'*eguaglianza*"⁵². Il *formalismo* di questo sillogismo "fa astrazione da ogni diversità qualitativa delle determinazioni, e tien conto soltanto della loro uguaglianza o disuguaglianza quantitativa": naturalmente il concetto e le sue determinazioni "non entrano in questo sillogizzare"⁵³.

Il metodo analitico riduce tutto al calcolo, e questo vale anche per l'analisi superiore nelle sue diverse impostazioni, nel senso che

⁴⁹ Si vedano anche le considerazioni di Hegel sul segno e sul simbolo, e sulla relazione del segno con il linguaggio; cfr. *Enzyklopädie*, paragg. 458, 459.

⁵⁰ *WdL* (1816), 47 (698).

⁵¹ *Ist.*, 205 (896).

⁵² *Enzyklopädie*, paragg. 188.

⁵³ *WdL* (1816), 105 (773).

da un certo momento in poi si procede solo per via algoritmica. Hegel ammette che nell'analisi superiore vi siano anche delle determinazioni sintetiche, "ossia altre determinazioni e rapporti che non quelli *indicati immediatamente* dal problema o dal teorema"⁵⁴, dopo di che, però, "lo sviluppo stesso è interamente *analitico*", come accade nel problema "di trovare la somma delle potenze delle radici di un'equazione"⁵⁵; in generale da un certo momento in poi il calcolo infinitesimale "non è altro che una serie di ordinarie operazioni analitiche"⁵⁶ (come accade nel calcolo *leibniziano*, dopo l'introduzione delle relazioni con i differenziali). Il metodo analitico di Lagrange si proponeva di ridurre tutta l'analisi superiore ad un calcolo (calcolo con le funzioni): le stesse funzioni venivano intese analiticamente come espressioni di calcolo, e la stessa operazione di *derivazione* ($D:f(x) \rightarrow f'(x)$) era riconducibile secondo Lagrange alle operazioni algebriche.

Il fatto però che il fine del metodo analitico sia quello di ridurre tutto ad un calcolo mostra la limitazione cui va incontro ogni determinazione concettuale, se si pensa di affrontarla in questa maniera. Dobbiamo infatti tener presente che Hegel, dopo una attenta riflessione sui vari tentativi di "calcolo logico" che avevano avuto luogo dopo le varie proposte *leibniziane*, afferma: "Il concetto non può come tale essere essenzialmente colto che collo spirito ... È inutile di volerlo fissare con figure spaziali e segni algebrici per l'uso del *l'occhio esteriore* e di una trattazione *inconcettuale e meccanica*, cioè di un *calcolo*"⁵⁷. Questa severa critica si estende a tutti gli algoritmi: anche a prescindere dalla formalizzazione iniziale, essi sono assolutamente inadatti a render conto della dialettica dei concetti. Con specifico riferimento al calcolo numerico egli precisa: "Poiché il calcolo è una faccenda così estrinseca, epperò meccanica, si sono potute costruire *macchine* che compiono nella maniera più perfetta le operazioni aritmetiche"⁵⁸. Ciò vale anche per il calcolo infinitesimale, sia nelle varie proposte di calcolo con gli infinitesimi, sia nella proposta di calcolo con le funzioni.

Se dalla parte teorica dell'analisi passiamo a quella applicativa,

⁵⁴ *Ist.*, 207 (899).

⁵⁵ *Ist.*, 207 (899).

⁵⁶ *Ist.*, 208 (900).

⁵⁷ *Ist.*, 48 (700). A questo proposito ci sia concesso di rinviare a A. MORETTO, *Hegel e il "calcolo logico"*, "Verifiche" IV, 1986.

⁵⁸ *WdL* (1832), 208 (235).

ad esempio alle applicazioni dell'algebra alla geometria, dobbiamo tener conto anche di alcune caratteristiche del metodo sintetico, dal momento che "l'esempio più fulgido del metodo sintetico è la scienza *geometrica*"⁵⁹. Anche in questo caso, senza volere approfondire i fondamentali problemi sottesi dalla concezione hegeliana del metodo sintetico, ci basta dare alcune indicazioni sulle limitazioni ulteriori da questo indotte sulla possibilità di esprimere adeguatamente il concetto.

Il metodo sintetico procede per definizioni, classificazioni e teoremi. Ma già le definizioni e le classificazioni sono intese in modo astratto o formale, e ad esse si applicano le critiche già esposte da Hegel alla trattazione formale dei concetti.

I teoremi dal canto loro sono connessi "nel procedere formale, nella catena della dimostrazione"⁶⁰; si ha solo la "conseguenzialità formale"⁶¹. Ciò che caratterizza la geometria come l'esempio più rappresentativo del metodo sintetico è "il sillogizzare formale", che ad essa "si adatta nella miglior forma possibile"⁶².

Il metodo analitico, e quello sintetico, servono pertanto in maniera egregia agli scopi che si prefigge la matematica. Essi sono però del tutto disadatti alla trattazione del contenuto concettuale, talora profondo di alcune determinazioni matematiche.

Così, anche prendendo in considerazione l'analisi superiore, non trova esito positivo la prospettiva di concepire "... il pensiero di una *matematica filosofica*, che conoscesse per concetti quel che l'ordinaria scienza matematica deduce da determinazioni presupposte, secondo il metodo dell'intelletto". Infatti, "poiché la matematica è la scienza delle determinazioni finite di grandezza, le quali debbono restare e valere nella loro finità e non trapassare, essa è essenzialmente una scienza dell'intelletto, e, poiché ha la capacità di essere questo in modo perfetto, ciò che occorre piuttosto è che le si conservi il vantaggio che ha di fronte alle altre scienze della medesima sorta, e non lo si turbi col mescolarvi il concetto ad essa eterogeneo, o gli scopi empirici"⁶³.

⁵⁹ *WdL* (1816), 226 (923).

⁶⁰ *Ist.*, 222 (918).

⁶¹ *Ist.*, 222 (919).

⁶² *Ist.*, 226 (923).

⁶³ *Enzyklopädie*, paragrafo 259.

10. Il "calcolo delle funzioni" di Lagrange.

Quanto abbiamo fino ad ora riscontrato dà l'indicazione, a nostro avviso precisa, che la matematica coglie il concetto del vero infinito, contenuto in alcune sue determinazioni, ma poi non è in grado di esprimerlo in modo adeguato, a causa della sua stessa costituzione.

Con tutte queste premesse Hegel si pone tuttavia la domanda, se vi sia una proposta per l'analisi superiore corretta come impostazione teorica, che entro il quadro di scienza dell'intelletto sia in grado di affrontare i problemi applicativi.

La risposta di Hegel è affermativa: Lagrange "prese la via schiettamente scientifica"⁶⁴. Il modo corretto di procedere è quello che egli espone con il suo "calcolo delle funzioni", esposto nella *Théorie des fonctions analytiques* e nelle *Leçons sur le calcul des fonctions*. Come risulta dal titolo, la *Théorie* contiene "les Principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infinitement petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies"⁶⁵. Nella sua opera egli si propone "de donner la théorie des fonctions considérées comme primitives et dérivées, de résoudre par cette théorie les principaux problèmes d'Analyse, de Géométrie et de Mécanique qu'on fait dépendre du Calcul différentiel et de donner par là à la solution de ces problèmes toute la rigueur des démonstrations des Anciens"⁶⁶.

Nel metodo di Lagrange possiamo distinguere due aspetti. Il primo, teorico, presiede alla determinazione delle *funzioni derivate* $f'(x)$, $f''(x)$, ... di una funzione primitiva $f(x)$. Punto di partenza è la proposizione che ad ogni funzione $f(x+i)$ sia associato lo sviluppo in serie di potenze ascendenti di i :

$$f(x+i) \rightarrow f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \dots \quad 67$$

Operando "algebricamente" Lagrange individua una operazione (corrispondente all'operatore D , tale che $f \rightarrow Df$, che egli indica

⁶⁴ *WdL* (1832), 286 (321).

⁶⁵ Rinviamo alla nota n. 1 di questo capitolo.

⁶⁶ LAGRANGE, *Théorie* cit., p. 20.

⁶⁷ In questa sede non è il caso di affrontare il problema dell'interpretazione della proposta di Lagrange sul "calcolo delle funzioni" e della sua coerenza (a tal riguardo rinviamo a P. DUPONT, *Storia del concetto di derivata*, Torino 1975, pp. 126 segg.; U. BOTTAZZINI, *Il calcolo subliminale: storia dell'analisi matematica da Euler a Weierstrass*, Torino 1981, pp. 42 segg.), e ci limitiamo a dare solo alcune indicazioni per inquadrare meglio il punto di vista di Hegel sulla questione.

con un accento: $f \rightarrow f'$, che rende conto della generazione dei vari coefficienti $p, q, r, \dots$ dello sviluppo in serie mediante l'iterazione della sua applicazione. Si ha così $f(x) \rightarrow f'(x) \rightarrow f''(x) \rightarrow \dots$, nonché $p = f'(x), q = f''(x)/2, r = f'''(x)/3!, \dots$. In questo modo per $f(x+i)$ si ottiene lo sviluppo $f(x) + if'(x) + i^2 f''(x)/2 + i^3 f'''(x)/3! + \dots$ (sviluppo in serie di Taylor).

Se mediante la derivazione si ha $f(x) \rightarrow f'(x), f'(x)$ è la derivata (prima) della $f(x)$, e $f'(x)$ è una primitiva di $f'(x)$ (si noti che se $f(x)$ è primitiva di $f'(x)$ anche ogni funzione $f(x) + c$, con c costante arbitraria, è primitiva di $f'(x)$).

In ciò consiste la parte fondamentale del calcolo delle funzioni di Lagrange: servirsi degli sviluppi in serie ottenuti dando alla x l'incremento i solo per ottenere la relazione che sussiste tra una funzione primitiva e la sua funzione derivata, per ridurre i vari problemi del calcolo infinitesimale all'operazione di derivazione o alla sua operazione inversa (ricerca delle primitive).

Hegel concorda con questo punto di vista di Lagrange. Ciò che egli non può ammettere è ogni eguaglianza del tipo $f(x+i)=f(x) + ip + i^2 q + \dots$. Egli però ammette che da ogni $f(x+i)$ si possa originare lo sviluppo infinito mediante la ripetizione dell'operazione di derivazione. Egli apprezza altresì le precisazioni di Lagrange che ciò che conta è solo l'operazione di derivazione, che le funzioni derivate non hanno niente a che fare con l'incremento i .

Lagrange aveva precisato che $f'(x)$ "n'est autre chose que le coefficient de i dans le premier terme du développement de cette fonction, après la substitution de $x+i$ à la place de x "⁶⁸.

Commentando Lagrange Hegel osserva che in questo modo, con questa "semplice, arida risposta che quello [p] è un coefficiente, sorto in forza di questa o quest'altra derivazione, — la prima funzione derivata in una certa maniera determinata, di una funzione primitiva", l'analisi sarebbe liberata dalle varie difficoltà cui va incontro con la "teoria dei limiti". Non solo. L'analisi sarebbe altresì liberata da molte delle "categorie formali" che essa incontra⁶⁹.

In realtà un residuo di formalismo è inevitabile. Così la categoria dell'infinito potenziale viene accettata, la definizione di funzione di Lagrange è formale, le formule sono espresse nella parte teorica con la massima generalità, si ricorre alla caratteristica f , ecc. Questa

parte teorica rappresenta infatti la premessa "tecnica", che è al tempo stesso "formale" ed "astratta", per il calcolo delle funzioni.

La parte "concreta" secondo Hegel è quella "applicativa", in cui la teoria serve alla risoluzione dei problemi della geometria e della meccanica.

Ci limiteremo ad una breve considerazione dei problemi geometrici, in cui Lagrange mostra le applicazioni più convincenti del suo metodo (secondo Hegel nella meccanica egli è portato ad attribuire significato concreto alle espressioni sorte con il calcolo, indipendentemente dai dati originari del problema⁷⁰, abbandonandosi così ad un altro tipo di formalismo, comune nella trattazione matematica della meccanica). Hegel prende in considerazione i problemi geometrici di determinazione della tangente ad una curva: (problema di "derivazione"), di determinazione dell'area di una superficie a contorno mistilineo (trapezoide), della lunghezza di un arco di curva; ed accenna al problema della determinazione del volume di un solido di rotazione (problemi di ricerca della *primitiva* di una funzione).

Hegel osserva che il procedimento lagrangiano è il più corretto. Lagrange parte dall'esame oculato della questione geometrica da trattare, delle definizioni e degli assiomi che entrano in gioco. Quindi riconduce la relazione tra la grandezza da determinare e le grandezze legate ai dati del problema ad una relazione tra una funzione primitiva e le sue derivate⁷¹, e viceversa.

11. Le considerazioni di Hegel sul calcolo delle funzioni.

Nelle sue linee generali Hegel condivide il punto di vista di Lagrange sul calcolo delle funzioni, con la condizione che non si

⁷⁰ Cfr. *ivi*, 271 (303): Hegel osserva che "nella moderna forma analitica della meccanica" le proposizioni di questa scienza "vengono addotte addirittura come risultati di calcolo, senza guardare se abbiano di per sé in se stesse un senso *reale*, cui corrisponda cioè una esistenza, e senza preoccuparsi di fornir di ciò una prova... Si dà come un trionfo della scienza di trovare *al di là dell'esperienza*, per mezzo del semplice calcolo, delle leggi, cioè dei principi dell'esistenza, i quali non hanno alcuna esistenza".

⁶⁸ LAGRANGE, *Théorie* cit., p. 34.
⁶⁹ *WdL* (1832), 267 (298, 299). Cfr. nota 77 del cap. II.

⁷¹ Su questi argomenti si veda LAGRANGE, *Théorie* cit., pp. 183 sgg., 238 sgg. Si veda *WdL* (1832), 286 sgg., 293 sgg. (321-323, 330-334). Ricordiamo che Hegel, oltre a quello di Lagrange, apprezza anche il metodo di Cartesio di determinazione della tangente ad una curva. Sulla determinazione della tangente con il metodo di

accettino uguaglianze tra una funzione ed il suo sviluppo in serie.

Hegel parte da un concetto di funzione analitica dove il legame tra le incognite è espresso da un'equazione (nel caso di due variabili l'espressione potrebbe essere sia *explicita*: $y = f(x)$, sia *implicita*: $F(x, y) = 0$). In questo senso egli si riferisce a "grandezze che per mezzo di una equazione vengono a trovarsi fra loro nel rapporto che l'una sia una funzione dell'altra"⁷², e, con maggiore generalità considera anche più grandezze collegate tra loro mediante un'equazione, tali che "il loro valore è indeterminato, ma in maniera tale che quando per l'una sopravviene da qualche parte un valore compiutamente determinato, cioè un valore numerico, anche l'altra è determinata, e così l'una è una *funzione* dell'altra"⁷³.

Per ciò che riguarda però le applicazioni del calcolo infinitesimale egli restringe l'interesse alle equazioni razionali intere in due variabili di grado $n \geq 2$, o ad esse riconducibili. Il caso $n = 1$ non viene considerato da Hegel significativo dal punto di vista delle applicazioni del calcolo differenziale perché agli stessi risultati si può giungere per mezzo della matematica ordinaria con semplici ragionamenti geometrici, ed è solo per la tendenza della matematica al formalismo che nella stessa regola di differenziazione delle potenze: $d(x^n)/dx = nx^{n-1}$ si comprende anche il caso $n = 1$ ⁷⁴.

Dal punto di vista delle applicazioni, se si esplicita la funzione in $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a$ (*funzione polinomiale di grado n*) si ha una notevole semplificazione nelle operazioni di derivazione e di integrazione, dal momento che sono sufficienti le formule per la derivazione ed integrazione di x^n ($n=0, 1, 2, \dots$), della somma di funzioni e del prodotto di una funzione per una costante. La funzione in considerazione è sempre la potenza, sicché effettivamente l'operazione fondamentale per il calcolo con le funzioni è la derivazione della potenza x^n : $Dx^n = nx^{n-1}$ e la sua

Cartesio e con quello di Lagrange ci siamo soffermati in altra sede. Una più dettagliata esposizione delle considerazioni di Hegel sulle applicazioni geometriche del "calcolo delle funzioni" di Lagrange verrà da me esposta nel volume *Hegel and the Mathematics of the Infinite*, di imminente pubblicazione.

⁷² WdL (1832), 267 (299).

⁷³ Ivi, 277 (309-310).

⁷⁴ Limitiamo le considerazioni alle funzioni esplicithe.

inversa $Px^n = (x^{n+1}/(n+1)) + c$, dove P significa "primitiva di", e c è una costante arbitraria. In questo caso, prescindendo dalle costanti e dalle somme, Hegel osserva che dallo sviluppo di $(x + t)^n$ in $x^n + nx^{n-1}t + \dots + t^n$ (sviluppo in questo caso con un numero finito di termini) per la funzione $f(x) = x^n$ si ottiene secondo il punto di vista di Lagrange $f'(x) = nx^{n-1}$.

Però, lasciando da parte le evidenti facilitazioni tecniche per il calcolo, da un punto di vista teorico viene imposta una restrizione molto grande all'insieme delle funzioni che possono venir prese in considerazione, anche se, più in generale, consideriamo le funzioni espresse implicitamente da $F(x, y) = 0$, dove $F(x, y)$ è un polinomio di grado n nelle due variabili x, y ⁷⁵.

Il testo hegeliano della *Scienza della logica* mostra però che questa restrizione non vien ritenuta come assolutamente essenziale da Hegel. Infatti la determinazione del "rapporto di una funzione potenziale e della funzione del suo sviluppo o potenza" è ciò che "sta più vicino alla vera maniera d'intendere la natura della cosa"⁷⁶, ma non ne esaurisce la natura. Hegel riconosce infatti che nel calcolo differenziale/integrale intervengono anche altri rapporti quantitativi "quali l'addizione etc.", e si considerano "anche i rapporti dei logaritmi, del circolo e delle serie, specialmente per render più trattabili le espressioni in vantaggio delle necessarie operazioni di deduzione delle funzioni primitive da quelle di sviluppo"⁷⁷. Esemplificando: senza la funzione trascendente $y = \ln x$ non si riuscirebbe a trovare la primitiva della

⁷⁵ Questa restrizione dipende anche dalla concezione hegeliana della potenza, con esponente intero maggiore di 1, come l'operazione aritmetica più elevata dal punto di vista concettuale, poiché in essa si ha l'uguaglianza dei *momenti* del numero: l'unità e le *potenze*. Hegel concepisce l'aritmetica come una scienza che prende le mosse dall'operazione "estrinseca" del *numerare*, e, attraverso l'*addizione* e la *moltiplicazione*, giunge con la potenza al suo livello più elevato (per ciò che riguarda le operazioni), adeguato al concetto di numero. Cfr. WdL (1832), 197 (222 sgg.).

Si tratta indubbiamente un punto di vista molto diverso da quello contemporaneo, che nelle strutture numeriche fa valere sin dall'inizio il punto di vista insiemistico e relazionale.

Va notato che la sistemazione data da Hegel alla questione appare insoddisfatta. Lo stesso Hegel riconosce che solo la seconda potenza realizza l'uguaglianza dell'unità e delle volte: quest'uguaglianza si perde nelle potenze dispari, e le altre potenze pari sono "una continuazione *formale*" del quadrato. Cfr. Ivi, 201 (227).

⁷⁶ Ivi, 298 (335).

⁷⁷ Ivi, 298 (336). Abbiamo modificato la traduzione di Moni, facendo corrispondere al tedesco "unsprüngliche" l'italiano "primitiva", conformemente alla terminologia matematica in uso.

funzione $y = 1/x$. In questo modo non si riuscirebbe pertanto a determinare l'area compresa tra l'iperbole $y = 1/x$ e l'asse delle x , relativa ad un intervallo $[a, b]$ in ascissa⁷⁸.

Sappiamo che secondo Hegel una funzione non può venir espressa in modo esatto mediante uno sviluppo in serie infinita, ma non abbiamo elementi sufficienti per sostenere che Hegel voleva escludere le funzioni trascendenti. D'altra parte gli stessi sviluppi in serie potevano servire per la ricerca di soluzioni approssimate, dal momento che Hegel giustamente non ammette che si eguagli la funzione $f(x)$ con una sua approssimazione $g(x)$, ma non ha niente contro un'approssimazione $g(x)$ avente ad esempio una espressione polinomiale.

D'altra parte Hegel voleva soltanto proporre una esemplificazione molto semplice della sostanza del problema, "raccontando semplicemente (durch einfaches Aufnehmen) ciò che si offre in questa parte della matematica"⁷⁹. Egli specifica tra l'altro che approva l'impostazione di Lagrange, ma "ne ha fatta l'esposizione in maniera così elementare per allontanare le determinazioni eterogenee che vi si mischiano"⁸⁰. Per questo ha considerato solo le funzioni razionali intere (di grado $n \geq 2$) o ad esse riconducibili, che fornivano la più semplice esemplificazione, senza proporsi di esporre l'argomento con completezza. In questo senso egli ammette infatti che "queste citazioni poterono restringersi a dei problemi semplici e alle maniere in cui essi si risolvono; e non sarebbe stato opportuno per la determinazione concettuale, della quale soltanto qui si trattava, né sarebbe stato in facoltà dell'autore di prendere in esame l'intero ambito della cosiddetta applicazione dei calcoli differenziale ed integrale"⁸¹.

12. Conclusione.

Alla fine di questo capitolo, in cui abbiamo preso in considerazione le difficoltà cui va incontro la matematica dell'infinito, e

⁷⁸ Hegel riconosce che il "rapporto delle potenze" riguarda molte determinazioni matematiche: "l'elevamento a potenza e l'estrazione di radice, poi il maneggio delle grandezze esponenziali e dei logaritmi, le serie, le equazioni di ordini superiori, si interessano e si affaticano solo intorno a rapporti basati sulle potenze". Cfr. *ivi*, 275-276 (308).

⁷⁹ *Ivi*, 276 (309).

⁸⁰ *Ivi*, 278 (312).

⁸¹ *Ivi*, 298 (335).

l'unica strada che secondo Hegel essa può seguire per rimanere fedele ai suoi canoni di rigore, possiamo a nostro avviso comprendere meglio l'obiettivo delle critiche portate da Hegel, talora con veemenza, alla matematica.

Queste critiche la investono quando essa vuol trattare da un punto di vista intellettualistico le determinazioni concettuali, e vengono altresì evidenziate quando si vuol trasferire il suo metodo (che necessariamente è un metodo del finito) alla filosofia. Non la investono, anzi in loro luogo troviamo espressioni di rispetto e di ammirazione, non solo quando intuisce il contenuto speculativo di alcune sue determinazioni, ma anche quando si muove con procedimento corretti nell'ambito che le è proprio, di scienza del finito.

Certamente in alcune parti delle opere di Hegel, in particolare modo nella *Fenomenologia dello spirito*, è presente in modo preponderante l'aspetto di critica negativa. Ma non si può non tener presente che la *Fenomenologia* si propone proprio di rimarcare le manchevolezze delle scienze rispetto alla filosofia.

La *Scienza della logica* sottolinea invece in modo inequivocabile l'importanza della riflessione da parte della filosofia sulla matematica. Mediante questa riflessione la filosofia è infatti in grado di trarre un guadagno speculativo non solo se considera gli esempi in cui la matematica dà indicazioni sul lato concettuale della questione, ma anche quando si sofferma a considerare il modo di procedere intellettualistico della matematica, e le questioni che mettono in grave difficoltà il suo metodo.

Infatti in ogni caso si sta svolgendo un discorso non "di matematica", ma "sulla matematica", quindi un discorso che appartiene già alla sfera speculativa.

CAPITOLO III

1. L'INFINITO E IL RAPPORTO DISCRETO-CONTINUO*

1. Introduzione.

Può apparire strano che nella II e nella III Nota sull'infinito matematico Hegel prenda in considerazione i *metodi di esaurimento*, degli *infinitesimi*, degli *indivisibili*, del "ductus lineae in lineam" etc., relativi al calcolo infinitesimale precedente l'analisi di Newton e di Leibniz, mostrando particolare interesse per la proposta di Cavalieri sugli indivisibili.

In effetti questi metodi non potevano certamente reggere il confronto, per ciò che riguarda la generalità dell'impostazione e la duttilità di impiego, con l'analisi di Newton e di Leibniz, e, come testimonia la storia della matematica, furono ben presto costretti a cedere il passo a quest'ultima. Tanto meno poteva porsi il confronto con le successive esposizioni di Eulero, Lagrange, Lacroix (per citare alcune tra le più rappresentative).

Hegel riteneva che questi metodi, anche se sul piano della capacità euristica e della generalità dell'impostazione risultavano superati dalle successive proposte dell'analisi, mantenevano però il loro interesse sul piano speculativo; e le stesse situazioni para-

* Questo capitolo costituisce una elaborazione della relazione *Hegels Auseinandersetzung mit Cavalieri und ihre Bedeutung für seine Philosophie der Mathematik*, tenuta al Convegno "Konzepte des Mathematisch Unendlichen im 19. Jahrhundert" organizzato dalla Ruhr-Universität a Bochum, nei giorni 2-4 Giugno 1986. È prevista la pubblicazione degli Atti del Convegno nella primavera 1989 presso la casa editrice Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

dossali, o addirittura antinomiche, cui allora si era condotti da tali ipotesi matematiche erano del massimo interesse per la filosofia.

Tra l'altro il metodo degli indivisibili di Cavalieri¹ manteneva un legame diretto con la geometria euclidea, che rappresentava sempre il modello per eccellenza del metodo deduttivo. Ed a quei tempi l'ambiente geometrico era ancora il più adatto per una discussione coinvolgente questioni di continuità-discontinuità che venivano chiamate in causa sin dalle ipotesi di questo metodo.

Questo metodo veniva esposto da Cavalieri con molto rigore, specificandone le modalità di applicazione. Esso permetteva di giungere con semplicità per via geometrica a risultati importanti sull'equivalenza delle figure (a tal punto che ancor oggi si ricorre ad esso in testi ad uso scolastico, per determinare l'equivalenza di alcune figure).

Oltre a ciò i matematici tennero sovente presente il punto di vista di Cavalieri, per esporre alcune proposte che ad esso in qualche modo si collegavano (l'integrale di Leibniz, che si richiama al concetto cavalieriano di "omnes lineae") o si differenziavano (i "divisibili evanescenti" di Newton, che si contrapponevano all'ipotesi degli indivisibili).

Gli indivisibili erano stati riproposti all'attenzione degli

¹ Si veda BONAVENTURA CAVALLERIUS, *Geometria indivisibilibus continuum nova quadam ratione promota*, Bononiae 1635; BONAVENTURA CAVALLERIUS, *Exercitationes geometricae sex*, Bononiae 1647, ristampata per conto dell'Unione Matematica Italiana nel 1980 ad Urbino (in seguito abbrevieremo i titoli in *Geometria*, e rispettivamente, *Exercitationes*). La Biblioteca Universitaria di Padova possiede anche l'edizione del 1653 della *Geometria*, "in hac postrema editione ab erroribus expurgata" (citiamo dal titolo). Abbiamo confrontato entrambe le edizioni nei casi di difficile lettura della stampa dell'edizione 1635, alla quale facciamo riferimento.

Sull'opera di Cavalieri, sulla sua teoria degli indivisibili, sulla "fortuna" in Italia ed in Europa del metodo degli indivisibili, si veda L. LOMBARDO-RADICE, *Introduzione*, in B. CAVALLERI, *Geometria degli indivisibili*, a cura di L. LOMBARDO-RADICE, Torino 1966 (data di stampa), pp. 7-27; E. GIUSTI, *Bonaventura Cavalieri and the Theory of Indivisibles*, stampato in Bologna, 1980, a cura dell'Unione Matematica Italiana (il volume accompagna la ristampa anastatica delle *Exercitationes*). Sul rapporto tra il pensiero di Cavalieri e la filosofia di Hegel cfr. J.O. FLECKENSTEIN, *Hegels Interpretation der Cavalierischen Infinitesimalmethode* in: *Stuttgarter Hegel-Tage 1970*, hrsg. H.G. GADAMER, Bonn 1974 ("Hegel-Studien", Behnt II). Cfr. anche W. BONSIENEN, *Hegels Raum-Zeit Lehre*, "Hegel-Studien", Band 20, p. 30.

scienziati e dei filosofi da Cavalieri e da Galilei, (cfr. *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*²). Galilei aveva ripreso l'importante discussione della filosofia scolastica sulla questione sviluppandola in due direzioni: la prima geometrica, concernente il rapporto tra gli indivisibili ed il continuo; la seconda fisica, concernente il rapporto tra gli indivisibili ed il vuoto con la materia.

La speculazione di Cavalieri sugli indivisibili riguarda l'aspetto geometrico della questione (cfr. *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* e *Exercitationes geometricae sex*), e lo sviluppo teorico che ha origine dall'ipotesi degli indivisibili, va molto più in là di quanto non avesse fatto Galilei, poiché Cavalieri costruisce un edificio geometrico che mira alla determinazione della misura dei continui relativamente ad estese classi di figure, mentre Galilei non aveva mai sviluppato sistematicamente questo tema. Ma anche nella speculazione filosofica, nonostante le dichiarazioni del Gesuato di modestia, e di rispetto nei confronti di Galilei, e nonostante le prudenti affermazioni di non volersi impegnare in questioni filosofiche, il pensiero di Cavalieri presenta caratteristiche di originalità rispetto a quello di Galilei, ed è del massimo interesse³.

Il metodo di Cavalieri degli indivisibili venne poi esteso da Torricelli agli indivisibili curvi, ottenendo importantissimi risultati di analisi. Grande attenzione riservò lo scienziato fiorentino ai paradossi degli indivisibili. Ma in questa sede non prenderemo in particolare considerazione l'opera di Torricelli sugli indivisibili, né quella di altri matematici (tra cui ricorderemo Pascal, Roberval, Wallis) che, ottenendo importantissimi risultati, proposero il loro punto di vista sulla questione, concorrendo alla rapida diffusione di questo tema in tutta l'Europa⁴.

² G. GALILEI, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, a cura di A. CARUGO e L. GEYMONAT, Torino 1958. La numerazione delle pagine è quella dell'Edizione nazionale delle Opere di Galileo Galilei, Firenze, 1890-1909, ristampate nel 1929-30, vol. VIII.

Si veda l'Introduzione di A. CARUGO e L. GEYMONAT in GALILEI, *Discorsi* cit., pp. IX-XXV, e le Note di A. CARUGO, *ivi*, pp. 591 sgg.

³ Cavalieri era dell'Ordine dei Gesuiti (da non confondere con i Gesuiti). In realtà Cavalieri, nelle pagine delle sue opere, prende posizione sulle varie questioni filosofiche che si presentano, anche se talora tale posizione si deduce implicitamente dal discorso cavalieriano, senza essere dichiarata esplicitamente nelle premesse.

⁴ Cfr. LOMBARDO-RADICE, *Introduzione* cit., pp. 20-24; GIUSTI, *Bonaventura Cavalieri* cit., pp. 49-54.

Ci limiteremo invece a prendere inizialmente in considerazione l'*Auseinandersetzung* tra il pensiero di Cavalieri e quello di Hegel quale risulta dalle pagine hegeliane, sviluppando il discorso con riferimento a tre temi: 1) la misura del continuo ed i paradossi della misura; 2) la composizione del continuo; 3) la molteplicità infinita. Questi temi, naturalmente, sono tra loro connessi, ma preferiamo trattarli separatamente per favorire il confronto con le considerazioni hegeliane. Oltre a ciò, il terzo è logicamente propedeutico al secondo, ed il secondo al primo. Ma preferiamo l'ordine prima esposto, poiché nel testo hegeliano il punto di partenza è il problema della misura (integrazione), e da questo si risale agli altri due temi.

Per ciò che riguarda il I tema (la misura ed i suoi paradossi) Hegel apprezza il fatto che Cavalieri riconduca i rapporti tra le misure dei continui ai rapporti tra gli indivisibili dei continui (senza ricorrere alla valutazione della misura come somma di infinite grandezze infinitamente piccole, o addirittura nulle). Egli apprezza in tal modo la "purezza" del metodo. Apprezza altresì il rigore con cui Cavalieri specifica le condizioni da soddisfare nell'applicare il suo metodo per evitare conclusioni paradossali, contraddicenti i risultati ottenuti per "esustione".

Estremamente importanti per Hegel sono altresì le questioni filosofiche sopra accennate, sottese dall'ipotesi cavalieriana degli indivisibili. Tali questioni riprendono e sviluppano i temi dibattuti dalla "scuola" sulla composizione del continuo e sulla natura dell'infinito. A questo riguardo Hegel apprezza la profondità e la chiarezza di pensiero di Cavalieri. Infatti la speculazione geometrica e filosofica di Cavalieri rappresenta un confronto diretto con le domande poste sin dalla filosofia e dalla matematica greche sul concetto di infinito, sulla molteplicità infinita, sulla composizione del continuo con atomi/indivisibili (rapporto tra la grandezza continua e quella discreta), sul problema della misura del continuo (superfici, solidi), esposto con grande chiarezza e consapevolezza che non troveremo superate per generalità di impostazione sin quasi alla fine dell'Ottocento, dopo la fondazione della *teoria degli insiemi* da parte di Cantor (preceduta dalle intuizioni di Bolzano), e la chiarificazione del concetto di *continuità* (Dedekind, Cantor) e la costruzione dei *numeri reali*⁵.

⁵ Cf. LOMBARDO-RADICE, *Introduzione* cit., pp. 25-26. Rinviamo alle se-

2. La III Nota sull'infinito matematico.

Nella III Nota sull'infinito matematico Hegel prende in considerazione quei metodi, precedenti l'analisi di Newton e di Leibniz, i quali si propongono la determinazione della misura di un *continuo* partendo dal *discreto*.

In questo senso "a Keplero si attribuisce la gloria di aver per primo avuto il pensiero di quell'inversione del procedimento, e di aver fatto del discreto il punto di partenza"⁶. Infatti Keplero intende la proposizione di Archimede, che l'area del cerchio è equivalente a quella di un triangolo rettangolo i cui cateti sono il raggio e la circonferenza rettificata, nel senso che la circonferenza sia costituita da tante parti, in numero infinito, quanti sono i suoi punti. Ognuna di queste parti può essere considerata come la base di un triangolo isoscele, e tutti assieme questi triangoli costituiscono il cerchio⁷: "con ciò egli annuncia la *risoluzione del continuo* nella forma del discreto"⁸.

Osserva Hegel che in molti metodi infinitesimali che si ispirano a questo punto di vista, "siccome una somma di punti non dà una linea, e una somma di linee non dà una superficie, così i punti vengono *subito* presi come *lineari*, allo stesso modo che le linee vengono prese come *superficiali*"⁹. Questi elementi lineari, superficiali vengono inoltre considerati come infinitamente piccoli. In questo modo "all'elemento, che ha la sua determinatezza come punto o come linea, vien quindi in pari tempo data insieme, nel primo caso la qualità di linea, nel secondo quella di superficie, affinché la somma, come somma di piccole linee, diven-

guenti opere degli autori citati: B. BOLZANO, *Paradoxien des Unendlichen*, Text hrsg. v. F. Prihonsky, mit *Einleitung und Anmerkungen* von B. VAN ROOSELAAR, Hamburg 1975; G. CANTOR, *Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, hrsg. v. E. ZERMELO, nebst einem Lebenslauf Cantors von A. FRAENKEL, Hildesheim 1966; R. DEDEKIND, *Stetigkeit und Irrationalzahlen*, Braunschweig 1872; *Was sind und was sollen die Zahlen*, Braunschweig 1888 (ora in *Gesammelte Mathematische Werke*, Braunschweig 1933, vol. III).

⁶ WDL (1832), 300 (338).
⁷ Ivi, 300 (338). Cf. J. KEPLER, *Nova stereometria doliorum vinariorum*, in *primis Austraici, figurae omnium aptissima; et usus in eo vtrique cubicae compendiosissimus & plane singularis. Accessit stereometriae Archimedeae supplementum*, in *Gesammelte Werke*, hrsg. v. F. HAMMER, Band IX, *Mathematische Schriften*, bearbeitet v. F. HAMMER, München 1960, p. 15.

⁸ Ivi, 300 (339).
⁹ Ivi, 301 (339).

ti una linea, come somma di piccole superfici, una superficie" ¹⁰. L'infinitamente piccolo ha pertanto il compito "di ottenere questo momento del passaggio qualitativo" ¹¹ da una dimensione (anche dalla dimensione "nulla" del punto) alla dimensione superiore.

Si vede pertanto, con queste e con simili considerazioni, "come il qualitativo, che vien considerato qui, differisca dall'oggetto della nota precedente. In quella il qualitativo risiedeva nella determinatezza potenziale" ¹², in realtà, in modo ancor più generale, nel concetto di funzione e nel rapporto tra la funzione stessa e le sue derivate. Invece "qui è lo stesso dell'infinitamente piccolo, soltanto come fattore aritmeticamente di fronte al prodotto, o come punto di fronte alla linea, linea di fronte alla superficie, e così via. Ora il passaggio qualitativo, che si tratta di fare del discreto, come quello in cui s'immagina risolta la grandezza continua, al contrario viene eseguito come un somma-re" ¹³.

In geometria il passaggio da una dimensione alla dimensione superiore può venir realizzato mediante il movimento. Riprendendo considerazioni già esposte nella *Dissertatio philosophica de orbitis planetarum* ¹⁴ Hegel precisa che "il passaggio della linea in superficie si deve intendere come il suo venir fuori di sé, a quel modo che il venir fuori di sé del punto è la linea, e quello della superficie è uno spazio totale" ¹⁵. Hegel riflette così sulla generazione del continuo a partire dal punto inteso come "centro di attività" (punto-mens della *Dissertatio*), e si collega alla speculazione sulla concezione "fluentista" degli enti geometrici, di antica origine nella matematica e nella filosofia greca, ma accolta, tra i moderni, tra gli altri dagli stessi Newton e Cavalieri ¹⁶. Egli specifica infatti: "Questo è lo stesso come quando s'immagina che il moto del punto sia la linea etc." ¹⁷, però con questa avvertenza: il movimento fisico introduce la determinazione del

tempo, "epperò in quella rappresentazione appare piuttosto solo come un accidentale, estrinseco mutamento di stato; bisogna prendere invece la determinatezza concettuale, che venne espressa come un venir fuori di sé" ¹⁸.

Questo mutamento qualitativo, da un punto di vista aritmetico, "è un moltiplicarsi dell'unità (come del punto etc.) nelle volte (nella linea etc.)" ¹⁹.

In quest'ordine di idee, che vogliono spiegare il passaggio qualitativo dal punto alla linea, alla superficie, al solido, Hegel tiene conto anche dei cosiddetti metodi del "ductus" geometrico: "ductus lineae in lineam", che intende la superficie come un prodotto di linee, "ductus plani in planum" etc. ²⁰. Egli tien conto anche dell'interpretazione della formula dell'area del trapezio, di basi a , b ed altezza h , ossia $A = (a+b)h/2$ ottenuta considerando infiniti segmenti del trapezio equidistanti tra loro e paralleli alle basi. La somma degli infiniti elementi superficiali aventi per base questi segmenti, e altezza il segmento di equidistanza dà la superficie del trapezio. Poiché i segmenti sono in *progressione aritmetica*, la generalizzazione della formula della somma di n termini in progressione aritmetica, $s_n = (a_1 + a_n)n/2$, al caso in cui n è infinito permette di ricavare la formula dell'area come prodotto, in una forma che sotto un certo aspetto è un "ductus lineae in lineam" ²¹.

3. La misura dei continui in Cavalieri. I paradossi della misura.

Nella III Nota Hegel dedica però il maggior interesse alla dottrina degli *indivisibili* di Cavalieri, sia perché questo metodo era più "puro" degli altri metodi con cui iniziava l'analisi infinitesimale nell'era moderna (così come quello di Lagrange lo era

¹⁰ *Ivi*, 301 (339).

¹¹ *Ivi*, 301 (339).

¹² *Ivi*, 302 (341).

¹³ *Ivi*, 302 (341).

¹⁴ G.W.F. HEGEL, *Dissertatio philosophica de orbitis planetarum*, in *Sämliche Werke*, Jubiläumsausgabe, I, hsg. v. H. GLOCKNER, Stuttgart 1927, pp. 1-29 (citato di ora in poi con *Dissertatio*).

¹⁵ *WdL* (1832), 302, (340). Cfr. *Dissertatio*, pp. 23-24.

¹⁶ Cfr. nota n. 67.

¹⁷ *WdL* (1832), 302 (340).

¹⁸ *Ivi*, 302 (340).

¹⁹ *Ivi*, 302 (340).

²⁰ Cfr. *ivi*, 301 (340).

²¹ Cfr. *WdL* (1832), 302-303 (341-342). Sul "ductus" geometrico (in Gregorio da S. Vincenzo) si veda C.B. BOYER, *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, New York 1959, pp. 135-136. Cfr. anche *ivi*, pp. 170 sgg. sulla determinazione dell'area del triangolo secondo Wallis. Si veda: J. WALLIS, *De sectionibus conicis, nova methodo expositis, tractatus*, anno 1655 primum editus, in *Opera mathematica*, I, mit einem Vorwort von C.J. Scriba, Hildesheim 1972 (reprographischer Nachdruck der Ausgabe Oxford 1695), p. 299.

nel confronto con gli altri metodi analitici, che avevano avuto inizio con Newton e con Leibniz), sia perché partendo dalle riflessioni di Cavalieri gli risultava agevole proporre considerazioni generali sul rapporto tra il continuo ed il discreto e sul concetto di infinito.

Per introdurre i metodi di Cavalieri Hegel osserva che vi è "una maniera nota di mostrar che la superficie di un circolo sta alla superficie di una ellisse, il cui grande asse sia il diametro di quel circolo, come il grande asse all'asse piccolo, in quanto ciascuna di queste superfici vien presa come la *somma delle ordinate* che le spettano. Ciascun'ordinata dell'ellisse sta alla corrispondente del circolo come l'asse piccolo all'asse grande; dunque, si conclude, stanno così anche le *somme* delle ordinate, cioè le *superfici*"²².

Tale proposizione può venire esposta in senso infinitesimale, considerando le ordinate come elementi d'area la cui somma dà l'area totale. Oppure, senza ricorrere agli infinitesimi (e alla "somma"), può essere intesa secondo il metodo di Cavalieri: poiché il rapporto tra le ordinate è uguale al rapporto tra gli assi, anche il rapporto tra le aree delle figure è uguale a tale rapporto²³. In questo senso Hegel osserva che "ciò che qui è stato spiegato, contiene anche il criterio per l'accennato metodo degli *indivisibili* di Cavalieri, metodo che vien con ciò parimenti giustificato, e che non abbisogna del ricorso all'infinitamente piccolo"²⁴.

Secondo Cavalieri, nel piano, considerata una linea (retta) di riferimento ("regola"), gli indivisibili di una figura sono segmenti con gli estremi nel perimetro della figura, paralleli alla *regola*. Nello spazio si procede in modo analogo²⁵. Osserva Hegel: "Questi indivisibili son linee, in quanto Cavalieri considera una superficie, oppure son quadrati o superfici di circolo, in quanto egli considera una piramide o un cono etc. La linea fondamentale, la superficie fondamentale, presa come determinata, Cavalieri la chiama *regola*"²⁶.

La proposizione fondamentale ricordata da Hegel, su cui si basa il metodo di Cavalieri vien esposta nelle *Exercitationes* nel

²² WdL (1832), 303-304 (342).

²³ *Geometria*, Liber III, Theor. IX, Prop. X.

²⁴ WdL (1832), 304 (343).

²⁵ Cfr. *Geometria*, Liber II, Definitiones I, II; *Exercitatio I*, Definitiones I, II.

²⁶ WdL (1832), 304 (343).

seguinte modo: "FIGURAE TAM PLANAE, QUAM SOLIDAE, SUNT IN RATIONE OMNIUM SUORUM INDIVISIBILIVM COLLECTIVAE, ET (si in iisdem reperiat una quaedam communis ratio) DISTRIBUTIVAE AD INVICEM COMPARATORUM"²⁷. Cavalieri distingue infatti tra un *primo* ed un *secondo metodo* degli indivisibili ("methodus prior", "methodus posterior"), a seconda che gli indivisibili siano confrontati "collective" oppure "distributively": "Nunc ergo dupliciter possumus comparare lineas figurae, ABCD, ad lineas figurae, EFGS, nempe vel collectivè, hoc est comparando aggregatum ad aggregatum: vel distributivè scilicet comparando singillatim quamlibet rectam figurae, ABCD, cumlibet rectae figurae, EFGS, sibi in directum existentibus"²⁸. I primi sei libri della *Geometria* applicano il primo metodo, il settimo libro il secondo²⁹.

Cavalieri attribuisce una notevole importanza alla Prop. IV del I Libro delle *Exercitationes* (cfr. *Geometria* Lib. II, Prop. IV), la quale "est quasi quidam nexus utriusque methodi Indivisibilium: in ea enim apparet comparatio omnium Indivisibilium figurarum, CAM, CME, tam collectivè quam distributivè sumptorum"³⁰. Questa proposizione afferma che se due figure piane sono collocate sulla medesima altezza, e se intersecandole con rette parallele alle basi si ottengono segmenti che stanno nel medesimo rapporto, anche le figure stanno nel medesimo rapporto³¹.

Dopo di che vengono dedotte numerose proposizioni euclidee, delle quali ricordiamo quella che dimostra che parallelogrammi che hanno la stessa altezza stanno tra loro come le ri-

²⁷ *Exercitatio I*, 6.

²⁸ *Exercitatio I*, 4.

²⁹ Come risulta dalle *Exercitationes* (*Exercitatio I*, pp. 4-5 (V-VIII)) la distinzione tra "distributive" e "collective" nel confronto tra gli indivisibili dei due aggregati è essenzialmente legata al fatto che le due figure siano contenute tra due rette parallele ad esse tangenti, oppure non lo siano. Nel primo caso, si possono comparare gli indivisibili dei due aggregati delle due figure "singillatim", pertanto "distributivè", considerando come "corrispondenti" gli indivisibili sulla stessa retta parallela alla "regola", e la corrispondenza è *biunivoca* (funzione iniettiva e suriettiva, ossia biiettiva).

Nell'altro caso si procede ad un confronto tra gli indivisibili delle due figure presi collettivamente ("collective"), come vien spiegato nei Teoremi I, II, III del libro II della *Geometria*, che hanno la loro conclusione nel Corollario al Teorema III.

³⁰ *Exercitatio I*, 29.

³¹ *Exercitatio I*, Prop. IV.

spettive basi. (*Exercitationes*, Lib. I, Prop. V; *Geometria*, Lib. II, Prop. V).

Commenta Hegel a questo riguardo: "In tal modo Cavalieri prova p. es. anche la proposizione elementare che i parallelogrammi di eguale altezza stanno nel rapporto della loro base: ogni coppia di linee, tirate in ambe le figure ad egual distanza dalla base e parallelamente ad essa, stanno fra loro nello stesso rapporto delle basi, epperò stanno in questo rapporto anche le figure intere" ³².

Una volta indicata la proposizione fondamentale che sintetizza i due metodi degli indivisibili, Hegel non rivolge il suo interesse ai vari ed importanti risultati ottenuti nelle applicazioni da Cavalieri, bensì a questioni teorico-critiche sulla dottrina di Cavalieri sugli indivisibili.

La prima riguarda il cosiddetto "posterior methodus" degli indivisibili, secondo la terminologia delle *Exercitationes*. Ma nella *Geometria*, nel Libro VII, il cui titolo è "Libro settimo nel quale tutte le cose che nei libri antecedenti sono state dimostrate con il metodo degli indivisibili vengono fatte vedere con un'altra argomentazione, da quel metodo indipendente" ³³, Cavalieri si proponeva di dimostrare le principali proposizioni conseguite nei precedenti libri senza ricorrere al metodo degli indivisibili (si accorgerà poi che anche questo metodo ricorre al concetto di indivisibili, anche se lo usa in modo diverso). Di fronte alle critiche rivolte dai matematici e dai filosofi a questo "nodo gordiano" della sua geometria, costituito dal concetto "di tutte le linee, o di tutti i piani" ³⁴, Cavalieri decide "di toglierlo completamente di mezzo nel presente libro, costruendo un'altra volta altri fondamenti, sulla base dei quali vengono comprovate con altra argomentazione, libera dal concetto di infinito, tutte le cose che nei precedenti libri sono state fatte vedere con il metodo degli indivisibili" ³⁵. In questo senso il commento di Hegel precisa che "per rimuovere poi questa pietra d'incanto, Cavalieri si sobbarca anche alla fatica, nel settimo libro aggiunto espressamente per questo, di dimostrare le proposizioni fondamentali della sua geo-

³² *WdL* (1832), 304 (343-344).

³³ *Geometria*, VII, 1.

³⁴ *Geometria*, VII, 3.

³⁵ *Geometria*, VII, 3.

metria in una maniera tale, che rimanga libera dal frammischiamiento dell'infinita" ³⁶.

Il principio di Cavalieri assume nel VII libro della *Geometria* la seguente forma (Teor. I Prop. I): "Figure piane quali si vogliono, collocate tra le medesime altezze, nelle quali - condotte linee rette qualunque equidistanti alle parallele in questione - le portate interrette di una qualsivoglia di dette rette sono uguali, sono del pari uguali tra di loro" ³⁷ (riportiamo solo la prima parte dell'enunciato).

Nella dimostrazione si ricorre sistematicamente alla *sovrapposizione* delle figure (mediante un movimento rigido). Hegel osserva a questo riguardo che "questa maniera riduce le dimostrazioni all'ordinaria forma ... del coprirsi delle figure, cioè, come fu notato, della rappresentazione della determinatezza qual *limite spaziale esterno*" ³⁸, e riprende a questo proposito le critiche già esposte nelle *Geometrische Studien*: "intorno a questa forma del coprire si può anzitutto fare ancora quest'osservazione, ch'essa in generale è per così dire un sussidio puerile per la rappresentazione sensibile" ³⁹.

La seconda questione riguarda l'apprezzamento rivolto da Hegel a Cavalieri per il rigore che egli pretende nell'applicazione del suo metodo per evitare conclusioni paradossali. Riferendoci al testo di Cavalieri, siano dati due parallelogrammi *KLM*, al testo di Cavalieri, siano dati due parallelogrammi *KLM*, le cui basi *LM*, *NO* giacciono sul piano *GH*, e la base comune *KI* sul piano *AB* parallelo a *GH*. I piani *AB*, *GH* siano perpendicolari al piano del parallelogramma *KLM*, (ed obliqui rispetto all'altro). Il piano *AB*, muovendosi parallelamente a se stesso per sovrapporsi al piano *GH*, interseca i due parallelogrammi lungo segmenti paralleli (gli indivisibili delle due figure paralleli alla base, posti in corrispondenza in questo modo).

Si parlerà per il primo parallelogrammo di "transitus rectus", e per il secondo di "transitus obliquus" del piano *AB*. Anche se il movimento del piano *AB* stabilisce una *corrispondenza biunivoca* tra gli indivisibili delle due figure paralleli alle basi, tale corrispondenza riguarda però "omnes lineae" di *KLM* nel transitio

³⁶ *WdL* (1832), 306 (345).

³⁷ *Geometria*, VII, Theor. I, Prop. I.

³⁸ *WdL* (1832), 306 (345-346).

³⁹ *Ist.*, 306 (346). Cf. G. W. F. HEGEL, *Geometrische Studien*, in *Dokumente zu Hegels Entwicklung*, hrsg. v. J. HOFFMEISTER, Stuttgart 1936, p. 288 sg.

retto con "omnes lineae" di *KNOL* nel transito obliquo. Essendo diversi i *transiti*, dall'eguaglianza degli indivisibili non si può concludere l'uguaglianza delle figure⁴⁰.

Gli indivisibili vengono paragonati da Cavalieri ai fili della trama di un tessuto (per le figure solide alle pagine di un libro)⁴¹ e la distanza tra due fili della trama del transito retto è minore della distanza tra i due fili corrispondenti della trama del transito obliquo. Come due stoffe con lo stesso numero di fili nella trama risultano però di diversa lunghezza se le distanze tra i fili della trama sono diverse, in modo analogo si può pensare che vadano le cose nei continui (anche se in questo caso i "fili" sono infiniti). Commenta Cavalieri: "Ita suo modo res supponi debet circa ipsarum figurarum indivisibilia, ne in comparatione aggregatorum eorundem possimus hallucinari"⁴².

Si comprendono così meglio le osservazioni di Hegel, che il principio di Cavalieri non si applica quando, ad esempio, "si confrontano fra loro due parallelogrammi che hanno uguali la base e l'altezza, ma non stanno però in un medesimo piano e fanno rispetto a un terzo piano angoli diversi. Qui le intersezioni parallele, che sorgono quando ci si immagina il terzo piano collocato loro attraverso e avanzantesi parallelamente a se stesso, non son più ad ugual distanza le une dalle altre, e quei due piani [=superfici] son fra loro disuguali"⁴³.

Hegel trova di estremo interesse queste "cautele" necessarie per non derivare assurdità nella misura dei continui, la cui origine si situa nel modo con cui si stabilisce la corrispondenza tra gli "aggregati infiniti", e rileva: "Cavalieri fa molto accuratamente osservare questa differenza di *transitus rectus* e *transitus obliquus* degli indivisibili... e taglia così fuori il superficiale malinteso che da questo lato potrebbe sorgere"⁴⁴.

Dei paradossi sugli indivisibili si occuparono, oltre Cavalieri, molti matematici, tra i quali ricordiamo, Torricelli e Tacquet. Situazioni contraddittorie o paradossali si presentavano di frequente nella trattazione matematica dell'infinito (ricordiamo la corrispondenza biunivoca stabilita da Galilei tra i numeri interi

⁴⁰ *Exercitatio I*, XIII, 15-16.

⁴¹ *Exercitatio I*, IV, 3.

⁴² *Exercitatio I*, XII, 15.

⁴³ *WdL* (1832), 307 (347). L' "altezza" è la distanza tra i piani *AB* e *GH*.

⁴⁴ *Ivi*, 307 (347).

ed il sottoinsieme dei numeri pari, ed il paradosso della "scodella" di Galilei), ed avevano in ogni caso il merito di approfondire la speculazione sull'infinito.

Di questi paradossi Hegel segnala quello rilevato da Tacquet nella determinazione della superficie di un cono rettangolare, quando si consideri "secondo quel metodo atomistico" il triangolo generatore del cono nella rotazione lungo l'asse come "composto dalle linee rette parallele alla base e perpendicolari all'asse"⁴⁵. In questo modo l'elemento determinante gli indivisibili sarebbe l'asse. Ma Barrow "mostra al contrario che per là determinazione della superficie non già l'asse, ma il lato del triangolo del cono dev'esser preso come quella linea la cui rivoluzione genera la superficie e che quindi (e non già l'asse) dev'esser presa come la determinatezza quantitativa per la moltitudine delle periferie"⁴⁶.

Questi inconvenienti, che obbligano Cavalieri e Barrow a specificare le condizioni che devono essere soddisfatte per evitare i paradossi, risiedono nel fatto che anche questi metodi partono dal discreto per determinare il continuo, e non tutti i modi di confrontare gli elementi discreti portano a risultati corretti nel continuo. A questo proposito Hegel osserva, a ragione, che "simili obiezioni o incertezze hanno unicamente il lor fonte in quell'indeterminata rappresentazione, che viene adottata, dell'infinita moltitudine di punti di cui si ritien constare la linea, o di linee di cui si ritien constare la superficie etc. Con questa rappresentazione viene offuscata la determinatezza di grandezza essenziale delle linee o superfici"⁴⁷. A questa incertezza Cavalieri e Barrow ovviano specificando le modalità di applicazione del metodo.

Alla conclusione della III Nota, prendendo in considerazione i vari metodi che si propongono di determinare il continuo mediante il discreto, Hegel osserva che un appunto che si può muovere a tutti questi metodi, è quello di cogliere nell'infinito solo la determinazione negativa, mentre importante è proprio la sua determinazione affermativa. In questo senso "la diversità

⁴⁵ *Ivi*, 308 (348).

⁴⁶ *Ivi*, 308 (348). Cf. I. BARROW, *Lectiones geometricae*, lectio II, in *The Mathematical Works*, Ed. W. Whewell, 2 Bde. in 1 Band, Cambridge 1860. Reprint: Hildesheim 1973.

⁴⁷ *Ivi*, 308 (348).

qualitativa del discreto col continuo in generale contien parimenti una determinazione negativa che li fa apparire come incommensurabili, e fa venir fuori l'infinito nel senso che il continuo, che s'ha da prendere come discreto, non deve aver più ora alcun quanto secondo la sua determinatezza continua⁴⁸.

In questo modo però non si è in grado di spiegare il passaggio dal punto alla linea, che è un mutamento qualitativo, pertanto "si affaccia qui una determinazione negativa". Ma proprio questa determinazione negativa "cagiona la difficoltà, difficoltà che collo scorgersi la sua indole particolare e la semplice natura della cosa viene risolta", come accade con il metodo di Cavalieri, che stabilisce il rapporto tra i continui mediante il rapporto tra gli indivisibili effettuato in maniera appropriata; "ma col ricorrere all'infinito, mediante il quale dovrebbe essere scansata, viene anzi solo gettata nella confusione e mantenuta affatto insoluita"⁴⁹, come accade coi metodi che si propongono di determinare il continuo come somma di infiniti indivisibili o infinitesimi.

Emerge da queste considerazioni il senso di grande rispetto ed ammirazione per l'opera geometrica del Gesuato sugli indivisibili, per la purezza del metodo, che non vuol sommare il discreto per ottenere il continuo, e per la cura posta (poiché al discreto in ogni caso si ricorre, ma il continuo è altra cosa dal discreto) affinché il confronto tra gli indivisibili non conduca a paradossi nella misura.

4. La composizione del continuo.

Il metodo degli indivisibili di Cavalieri pur essendo più potente e più facile da maneggiare di altri metodi "geometrici", non poteva certamente reggere il confronto con i metodi analitici, sia quelli che ricorrevano agli infinitesimi, sia quello di Lagrange.

Ma l'attenzione di Hegel verso Cavalieri non è rivolta né ad un confronto con gli altri metodi riguardante la loro estensione e potenza, né ai già notevolissimi risultati che egli conseguì⁵⁰.

⁴⁸ *Ivi*, 308-309 (349).

⁴⁹ *Ivi*, 309 (349).

⁵⁰ A questo proposito rinviamo alle note di Lucio Lombardo-Radice in CAVA.

Essa è piuttosto rivolta alle questioni teorico-filosofiche coinvolte dall'applicazione di questo metodo: un esempio di ciò è costituito proprio dai paradossi sugli indivisibili che riguardano la misura dei continui, ma la cui origine dipende dalle ipotesi fatte sugli indivisibili stessi.

Cercheremo ora di esporre alcuni aspetti di tale problematica.

La speculazione filosofica sugli atomi e sugli indivisibili e sul loro rapporto con il continuo e con il concetto di infinito ha origine antica (filosofia greca). Dibattuta con grande impegno dalla filosofia scolastica e tardo-scolastica (ricordiamo in modo particolare Thomas Bradwardine)⁵¹, viene riproposta all'attenzione degli studiosi da Galilei nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche* di Cavalieri nella *Geometria* e nelle *Exercitationes*. La *Geometria* di Cavalieri (1635) fu pubblicata prima dei *Discorsi* di Galilei (1638), ma sappiamo che Galilei aveva interesse per la *composizione del continuo* almeno sin dal 1610 (Lettera a Belisario Vinta, Padova, 7 maggio 1610)⁵².

Senza inoltrarci nella questione ci pare di poter dire che: 1) il tema degli indivisibili era dibattuto nell'ambiente galileiano sotto l'impulso dello stesso Galilei; 2) l'interesse di Galilei per la questione non è solo matematico ma anche fisico (composizione della materia); 3) invece l'interesse di Cavalieri è esclusivamente (almeno dalle opere consultate) geometrico; nei punti di vista dei due autori vi sono notevoli concordanze e anche differenze: 4) tuttavia l'opera di Cavalieri presenta un suo carattere di originalità rispetto a quella di Galilei (pur ri-

LIERI, *Geometria* cit., e a GIUSTI, *Bonaventura Cavalieri* cit., pp. 66-90 (Contenuto e commento delle *Exercitationes*).

⁵¹ Sulla storia dell'atomismo dal medioevo sino a Newton cf. in generale K. LAASWITZ, *Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton*, II B.de, Hamburg und Leipzig 1890. Sul rapporto tra il punto di vista galileiano e cavalieriano sugli indivisibili e la filosofia scolastica cf. FLECKENSTEIN, *Hegels Interpretation der Cavalierischen Infinitesimalmethode* cit., e le Note di A. Carugo, in GALILEI, *Discorsi* cit., pp. 625 sgg.

⁵² Cf. GALILEI, *Opere* cit., vol. X.

La discussione con Galilei sugli indivisibili, quale ci proviene dalle *Lettere* di Cavalieri a Galilei, è di estremo interesse per comprendere meglio i rispettivi punti di vista, e l'eco della discussione si trova anche nelle opere citate. Cavalieri si rivolge sempre con grande rispetto a Galilei per ottenere chiarimenti sulle questioni riguardanti gli indivisibili, il continuo e l'infinito. Galilei però non pubblica mai il trattato *De compositione continui*, nonostante fosse sollecitato a farlo dallo stesso Cavalieri.

(vale a dire, quale sia il "tipo" di infinità, al modo in cui noi distinguiamo tra infinità numerabili, e in queste tra insiemi densi – numeri razionali – oppure no – numeri naturali –, e infinità continue – i numeri reali –);

b) che per descrivere tutti gli indivisibili è necessario il movimento. Il continuo stesso è generato dal movimento;

c) considerando il concetto di "omnes lineae, omnia plana" Cavalieri si riferisce all'*aggregato* (insieme) delle linee e dei piani e non alla loro *somma*: come abbiamo visto, nel problema della misura egli non somma gli indivisibili ma eguaglia il rapporto tra due superfici di figure al rapporto degli indivisibili dei due aggregati (siano essi confrontati *collective* o *distributive*);

d) ciò che però ci pare maggiormente rilevante nella posizione di Cavalieri sulla *composizione del continuo* esposta nella *Geometria* e nelle *Exercitationes* è che Cavalieri distingue tra il continuo C che contiene l'*aggregato* A di tutti gli indivisibili e l'*aggregato* stesso A di tutti gli indivisibili: insiemisticamente potremmo dire che $C \supset A$, ma da questo non siamo autorizzati a dire che $C = A$.

A proposito di questo punto di vista si è spesso detto, anche da parte di autorevoli studiosi, che Cavalieri per prudenza non aveva preso posizione sulla composizione del continuo. In realtà ci sembra che Cavalieri eviti il "disimpegno" su questa importante questione filosofica: il continuo per Cavalieri è in ogni caso composto da infiniti indivisibili, e quello che viene lasciato impregiudicato è il punto se oltre agli indivisibili geometrici ci sia anche qualcosa d'altro.⁵⁹

Sia nella *Geometria*, sia nella *Exercitationes*, a ben vedere, Cavalieri sulla composizione del continuo prende una posizione analoga per certi aspetti a quella di Galilei. Infatti nella Prefazione del Libro VII della *Geometria* egli afferma: "Quoad continui autem compositionem manifestum est ex praecostensis ad ipsum

⁵⁹ Cavalieri in effetti faceva propria l'ipotesi galileiana che i continui fossero composti da infiniti indivisibili. A questo riguardo è interessante la *lettera* a Torricelli dell'8 Gennaio 1644, dalla quale apprendiamo che Cavalieri stava scrivendo un *Dialogo* (in tre "giornate"), per rispondere alle critiche mosse da Guldino al suo metodo degli indivisibili, con tre interlocutori: P.e D. Benedetto Castelli, il Sig. Cesare Marsili e Uslupla Gindulus (anagramma di Paulus Guldinus). Scrive Cavalieri nella *Lettera*: "Vi ho inserito [nei Dialoghi] alcuni discorsi fatti dal Marsiglio con un poco di liber-

ex indivisibilibus componendum non minime cogi, solum enim continua sequi indivisibilium proportionem, & è converso, probare intentum fuit, quod quidem cum utraque positione stare poterit".⁶⁰

Queste due posizioni sono: I) il continuo altro non è che gli indivisibili; II) il continuo è composto da indivisibili e da altro: "Vel enim continuum nihil aliud est praeter ipsa indivisibilia, vel aliquid aliud", naturalmente oltre gli stessi indivisibili, come si spiega dopo nella *Geometria*, Lib. II, Prop. II, Schol., e viene ripreso nella *Exercitatio I*, Prop. II, Schol.⁶¹ La posizione di Cavalieri è per certi aspetti analoga a quella di Galilei, secondo il quale i continui, es., la linea, sono composti o da infiniti indivisibili della linea, o da infiniti indivisibili della linea ed infiniti "vacui", per Galilei pure indivisibili.

Cavalieri sostiene che in ogni caso, gli aggregati degli infiniti indivisibili geometrici di due figure sono mutuamente confrontabili, pur essendo indefiniti, altrimenti non sarebbero confrontabili nemmeno le figure. Ma le figure sono confrontabili, pertanto sono confrontabili anche gli aggregati. In questo modo egli vuole mostrare che l'infinità non è di ostacolo al confronto con gli aggregati, confronto che egli si preoccupa di stabilire in entrambi i metodi (*prior* e *secunda*).⁶²

A questo riguardo ricordiamo ancora una volta che mentre noi interpretiamo la frase "il continuo è composto di indivisibili" come "il continuo è composto da quelli e solo da quelli", da Galilei e da Cavalieri essa veniva intesa come "il continuo contiene infiniti indivisibili, ma potrebbe contenere anche altro" ($C \supset A$, ma non è detto che $C = A$). Questa è una prima difficoltà da rimuovere per intendere il testo cavalieriano. Ma a ciò si deve aggiungere il rilievo, che in questo Scholion la forma del periodo di Cavalieri è alquanto pesante, pertanto poco adatta a render chiara l'esposizione.

ta filosofica, acciò anco i puri filosofi vi abbiano qualche cosa per il gusto loro, sebbene di poco momento, anzi so, che a molte cose daranno del naso, come alla composizione del continuo d'indivisibili...". E. TORRICELLI, *Opere*, a cura di G. LORIA e G. VASSURA, Faenza 1919, vol. III, p. 160.

⁶⁰ *Geometria*, VII, 2.

⁶¹ *Geometria*, II, Prop. II, Schol. 17; cf. *Exercitatio I*, Prop. II, Schol., 23.

⁶² Cfr. Nota n. 29.

Questa pesantezza di linguaggio – riteniamo – induce Hegel in questo caso ad una interpretazione “ridotta” del pensiero di Cavalieri sulla composizione del continuo, nel senso che “il continuo non è altro che *gli indivisibili stessi*”⁶³, il che rappresenta invece solo una delle due alternative proposte da Cavalieri. Ma anche se le considerazioni di Hegel sono indirizzate ad una sola parte dell’alternativa, esse mantengono valore lo stesso, poiché Cavalieri si guarda bene dall’escludere quest’alternativa.

Tenendo conto di questa “restrizione”, le osservazioni di Hegel sulla composizione del continuo in Cavalieri sono alquanto interessanti, specie se le mettiamo in relazione con l’analisi che Hegel fa del rapporto tra grandezza continua e grandezza discreta (cfr. *infra*). Hegel osserva che “le categorie, che Cavalieri adopera in proposito, che il continuo sia *composto* d’indivisibili o *consti* d’indivisibili e così via, non son certamente soddisfacenti, poiché in esse si pretende in pari tempo all’intuizione del continuo, o come dianzi si disse, alla sua *esistenza esteriore*. Invece di dire che il continuo non è altro che *gli indivisibili stessi*, sarebbe un’espressione più esatta epperò anche subito di per sé chiara, il dire che la determinatezza di grandezza del continuo non è altra che quella degli indivisibili stessi”⁶⁴.

Ci siamo soffermati per prima cosa, e con una certa estensione, sul punto d). Prendendo in considerazione anche gli altri punti a), b), c), ci sembra che le considerazioni di Hegel sul continuo secondo Cavalieri siano alquanto pertinenti. Infatti Hegel mostra consapevolezza del fatto che Cavalieri

a) “non confronta già il loro *numero* [degli indivisibili], numero che noi non conosciamo ..., ma soltanto la *grandezza*, cioè la determinatezza quantitativa come tale, che è uguale allo spazio occupato da queste linee”⁶⁵;

b) ricorre alla descrizione dei continui (e degli indivisibili dei continui) mediante il movimento (concezione “fluentista” delle

⁶³ WdL (1832), 305 (345).

⁶⁴ *Ivi*, 306 (345). Indipendentemente dalla scelta di una delle due alternative sulla composizione del continuo, in entrambi i casi si conclude: “continua sequi indivisibilium proportionem” (*Geometria*, Liber VII, Praefatio). Hegel osserva che Cavalieri esprime “la coscienza più determinata di non essere in alcun modo costretto, dalla sua particolare dimostrazione, a rappresentarsi il continuo come composto d’indivisibili: i continui non fanno che seguire la proporzione degli indivisibili”.

⁶⁵ WdL (1832), 305 (344-345).

grandezze) (cfr. la “differenza di *transitus rectus* e *transitus obliquus* degli indivisibili”⁶⁶;

c) non confonde l’aggregato con la somma degli indivisibili.

5. Continuità e discrezione.

La concezione cavalieriana del continuo è, si è detto, *semi-atomistica*, o *neo-pitagorica*: il continuo è descrivibile con il “fluxus” dell’indivisibile; il continuo contiene infiniti indivisibili. In questo modo si potrebbe dire, addottando il punto di vista hegeliano, che da un lato è sottolineato il momento della continuità (fluxus), dall’altro il momento della discrezione (indivisibili).

Ricordiamo in breve che la concezione fluentista trovava applicazione anche nella Geometria analitica e nell’analisi, al sorgere dell’era moderna (ricordiamo il ricorso al movimento nella generazione delle curve (Descartes), ed i metodi infinitesimali cinematici (Torricelli, Roberval)). Ma il più illustre sostenitore della concezione fluentista è senza dubbio Newton, che teorizzò le *fluens* e le *flussioni*, e che nello stesso concetto di “evanescente” ricorre ad una concezione “non-statica” della grandezza⁶⁷.

Il punto di vista *fluentista* è per Hegel di grandissima importanza. Tra l’altro lo stesso concetto di *divenire* viene esemplificato con le grandezze evanescenti nelle prime pagine della *Wissenschaft der Logik*. La concezione fluentista appare ad Hegel in generale adeguata alla sua logica ontologica, che costruisce non solo la geometria, ma anche la stessa filosofia della natura, a partire dal “punto che si muove”: punto di vista esposto sin dalla

⁶⁶ *Ivi*, 307, (347).

⁶⁷ Sull’esposizione della teoria delle fluens-flussioni cfr. I. NEWTON, *Tractatus de quadratura curvarum*, cit.. Newton tratta diffusamente dell’argomento anche nell’opera *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*. A tal fine, sotto il titolo *Artis analyticae specimina vel geometria analytica* si veda NEWTON, *Opera quae extant omnia* cit., I, pp. 389-518. Sulla concezione delle grandezze evanescenti si veda I. NEWTON, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, in *Opera quae extant omnia* cit., II, Lib. I, Sect. I, “De Methodo Rationum Primarium & Ultimarum”.

Però Newton si discosta da Cavalieri, poiché mentre da un lato assume la posizione “fluentista”, dall’altro nei *Principia*, illustrando il “metodo delle prime ed ultime ragioni”, non accetta l’ipotesi degli indivisibili, poiché la considera “alquanto turrior”, e preferisce considerare i continui come composti da “divisibili evanescenti”.

Dissertatio (punto-mens) e ripreso nella *Wissenschaft der Logik* e nell'*Enzyklopädie*⁶⁸.

La concezione "fluentista" è legata in logica al momento della "continuità". Ma nello sviluppo della Logica hegeliana è necessario tener conto anche del punto di vista della "discrezione", il cui primo momento di realizzazione si ha nell'"atomistica", che cerca di ridurre ogni cosa ad una *multitudine* di uno.

Nella "Quantità", trattando della grandezza continua e discreta, si comprende che l'antinomia tra i due momenti si risolve dialetticamente.

Queste importanti pagine sulla "continuità" e sulla "discrezione" trovano ulteriore sviluppo nelle osservazioni su Cavalieri della redazione del 1831 della "dottrina dell'essere".

Ricordiamo che Kant assume la seguente definizione della quantità continua: "La proprietà delle quantità, per la quale in esse non c'è parte che sia la più piccola possibile (cioè una parte semplice), dicesi la *continuità* di esse. Spazio e tempo sono *quantità continue*... Quantità di questo genere si possono chiamare anche *fluente*, poiché la sintesi (dell'immaginazione produttiva) è nella loro formazione un processo nel tempo, la cui continuità si suole indicare in particolare coll'espressione fluire (scorrere)".⁶⁹ Questo richiamo al fluire costituisce pertanto un legame tra la concezione delle grandezze di Cavalieri da una lato, e di Newton e Kant dall'altro. La distinzione si ha invece nel fatto che Newton nel metodo delle prime ed ultime ragioni dei *Principia*, e Kant nella *Critica della ragion pura*, si discostano dalle concezioni atomistiche di Cavalieri e Galilei, sostenendo la sola divisibilità infinita delle grandezze, senza che si arrivi mai alle parti semplici.

Tutto ciò è di estrema importanza per Hegel nell'esame del concetto di quantità, e dell'antinomia tra continuità e discrezione che in essa si presenta.

Hegel osserva infatti che nella "Dialettica trascendentale" della *Kritik der reinen Vernunft* di Kant sorge l'antinomia che riguarda "la cosiddetta *divisibilità infinita della materia*, ed è basata sull'opposizione dei momenti di continuità e discrezione, che il concetto della quantità contiene in sé"⁷⁰. Secondo Hegel "tale

antinomia consiste solo in questo, che debbono affermarsi tanto la discrezione quanto la continuità. L'affermazione unilaterale della discrezione dà l'infinito o assoluto *esser diviso*, epperò, per della discrezione un indivisibile; all'incontro, l'affermazione unilaterale della continuità, dà l'infinita divisibilità"⁷¹. La lettura di Kant può pertanto essere esemplificata con i punti di vista di Newton (divisibilità) e di Cavalieri (indivisibile).

Secondo Hegel "l'intera antinomia si riduce dunque alla separazione ed all'affermazione diretta dei due momenti della quantità, e precisamente di codesti momenti come assolutamente separati"⁷²; la *continuità* e la *discrezione*. La risoluzione dell'antinomia consiste per Hegel proprio nella constatazione che la continuità è anche discrezione: "la quantità contiene dunque i due momenti della quantità e della discrezione. Dev'esser posta in tutti e due come nelle sue determinazioni"⁷³.

Sotto un certo punto di vista le delucidazioni di Cavalieri sulla composizione del continuo portavano conforto alla tesi di Hegel. Infatti in Cavalieri, da un lato i continui sono misurabili proprio perchè gli indivisibili sono confrontabili. D'altra parte gli indivisibili sono confrontabili proprio perchè i continui sono confrontabili. Sicché la continuità si appella alla discrezione, e la discrezione alla continuità.

6. *Le multitudini infinite.*

Uno dei grandi meriti, filosofici e matematici, di Cavalieri è quello di aver preso in considerazione "insiemi" infiniti, ossia contenenti infiniti elementi. Ciò va inteso in questo senso: non dobbiamo cercare in Cavalieri la prefigurazione della cantoriana teoria degli insiemi (e ciò vale anche per Spinoza e per Hegel, come abbiamo precisato in altre circostanze), ma dobbiamo riconoscere che nella discussione filosofica e matematica sul concetto di insieme alcune idee (in questo caso di Cavalieri) trovarono sviluppo in, o favorirono lo sviluppo di, quella teoria. Non si vuole pertanto modernizzare⁷⁴ il pensiero di Cavalieri o di He-

⁶⁸ Cfr. nota n. 14.

⁶⁹ K+V, 154 (186).

⁷⁰ WdL (1832), 181 (204).

⁷¹ Ivi, 179, (202).

⁷² Ivi, 187, (210).

⁷³ Ivi, 189, (213).

⁷⁴ Cfr. la nota n. 5.

gel, ma segnalare che alcuni loro punti di vista rappresentarono fecondi semi per lo sviluppo di una teoria eccezionalmente importante in logica ed in matematica. E riteniamo che sarebbe un grande errore non tenerne conto, allo stesso modo che sarebbe errato non riconoscere il debito di questi autori nei riguardi di autori precedenti.

Così, anche se Cavalieri parla di "aggregati" e di "omnes lineae, omnia plana", ci sia concesso di usare per questi termini la parola "insieme". Gli insiemi di indivisibili cui ricorre Cavalieri (e Galilei) sono infiniti in senso "attuale": sono cioè "insiemi costituiti da un numero infinito di oggetti, intesi come esistenti simultaneamente perlomeno nel pensiero".⁷⁵

Sarà d'altra parte opportuno precisare i limiti entro i quali l'"insieme" cavalieriano (ed hegeliano) corrisponde all'insieme cantoriano. A questo proposito teniamo presenti le indicazioni di Casari, che indica "come caratteristiche del concetto cantoriano di insieme le seguenti proprietà: 1) la sua *esistenza* in corrispondenza ad ogni molteplicità di enti distinti caratterizzabile da una condizione. 2) la sua *determinazione* completa da parte degli elementi della molteplicità corrispondente. 3) la sua *sostanzialità* nel duplice aspetto di: a) *individualità* e cioè capacità al pari di ogni altra sostanza individuale a godere di attributi, ad essere, cioè, elemento di molteplicità; b) *assolutezza* e cioè indipendenza dal linguaggio nel senso che un insieme e le sue proprietà sono indipendenti da ogni nostra possibilità linguistico-teoretica di caratterizzarli".⁷⁶

Quando, nelle pagine che consideriamo, l'attenzione di Cavalieri e di Hegel è rivolta agli insiemi infiniti, ci pare che manchi la consapevolezza della proprietà 3 a): l'individualità-sostanzialità dell'insieme non va oltre il riconoscimento della determinazione univoca dell'insieme, e che due insiemi possano essere posti in corrispondenza. Di conseguenza non troviamo in essi alcunché di sistematicamente analogo alla costruzione cantoriana dei numeri transfiniti cardinali ed ordinali.⁷⁷

⁷⁵ N. BOURBAKI, *Éléments d'histoire des mathématiques*, Paris 1960, p. 40.

⁷⁶ E. CASARI, *Questioni di filosofia della matematica*, Milano 1972, p. 21.

⁷⁷ Cf. CANTOR, *Abhandlungen* cit., pp. 115 sgg. Per una trattazione moderna della teoria degli insiemi si veda D. MONK, *Introduction to Set Theory*, New York 1969; S. LIPSCHUTZ, *Set Theory and related Topics*, New York 1964. Cf. anche P. J. COHEN, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, New York 1966.

Ma anche con queste limitazioni ci sembra che i contributi portati da Cavalieri e da Hegel allo sviluppo di un concetto così complesso come quello di insieme siano estremamente importanti, in modo particolare perché ne affermano la legittimità e l'effettualità in presenza del concetto di infinito, contro il luogo comune di derivazione aristotelica che dell'infinito si potesse parlare soltanto in potenza.

Per Cavalieri ha senso parlare di insieme infinito, a patto che si dia una *rappresentazione caratteristica* dell'insieme: "Quanto alla formazione del concetto di tutte le linee, ovvero di tutti i piani ritenuti che noi possiamo facilmente pervenire ad esso per via di negazione, in modo che precisamente si intenda non escludersi alcuna linea, oppure alcun piano".⁷⁸

Anche Hegel ritiene che sia della massima importanza considerare moltitudini di infiniti elementi *ben-definite*, come risultate dalle considerazioni sull'esempio di Spinoza dei due cerchi contenuti l'uno nell'altro e non concentrici. Il concetto della totalità dei segmenti ottenuti come intersezione delle semirette uscenti dal centro di uno dei due cerchi, ad es. del più piccolo, con la superficie contenuta nei due cerchi, dà luogo ad un "infinitum actu": "Spinoza rigetta quella rappresentazione dell'infinito, secondo la quale esso viene immaginato come moltitudine o come serie non compiuta, e ricorda che qui nello spazio dell'esempio l'infinito non sta al di là, ma è presente e compiuto".⁷⁹ Ricordiamo che nelle *Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie* (pur con le debite cautele dovute alle modalità di redazione del testo) si propone come infinito effettivo quello della totalità dei punti di un segmento AB .⁸⁰ E nella *Wissenschaft der Logik* si affianca all'esempio di Spinoza, come infinito effettivo, l'infinito che la matematica ha introdotto nelle funzioni delle linee curve,

⁷⁸ *Geometria*, VII, 2. In questo modo abbiamo un criterio per stabilire se un elemento appartiene o no all'insieme.

A questo proposito Lombardo-Radicke richiama "l'attenzione sul modo, tutto moderno, nel quale Cavalieri definisce qui un insieme infinito: non assegnando individualmente, uno per uno, i suoi elementi (come avrebbe voluto l'empirista Galileo no...), ma assegnando una proprietà caratteristica degli elementi dell'insieme", qual è quella, ad esempio, di essere tutte le linee della figura parallele ad una linea data.

⁷⁹ *WdL* (1832), 248, (276). Cf. B. SPINOZA, *Epistola XII*, in SPINOZA, *Opera*, hrsg. v. C. GEHARDT, Band IV, pp. 59-60.

⁸⁰ G. W. F. HEGEL, *Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie III*, in *Werke* cit., Band 20, pp. 172-173.

"e in generale nelle *funzioni delle grandezze variabili*", che è "il vero infinito matematico, l'infinito quantitativo, al quale pensava anche Spinoza"⁸¹ – si pensi ai punti del grafico di una tale funzione, definita su di un intervallo; d'altra parte lo stesso esempio di Spinoza è interpretabile mediante una funzione –⁸²

In ogni caso la moltitudine infinita dà una vera infinità se si considera la totalità degli elementi che obbediscono ad una certa legge. Vi è pertanto concordanza a questo riguardo tra il punto di vista di Cavalieri e quello di Hegel.

Tra le obiezioni mosse dalla filosofia scolastica al ricorso ad aggregati attualmente infiniti ricordiamo l'osservazione che a) in tal caso si può avere un infinito maggiore di un altro (il che sembrava incompatibile con una definizione univoca di infinito); b) non si dispone di un "numero infinito" per "*numerare*" tale aggregato (pertanto non è possibile stabilire confronti tra gli elementi di due aggregati).

Però proprio la scuola galileiana mostrava a) che un infinito poteva essere maggiore di un altro e b) che si potevano stabilire confronti tra gli elementi di due insiemi infiniti⁸³.

Osserva Cavalieri che molti rimanevano perplessi di fronte ai suoi principi "[propterea] quod unum infinitum alio maius dari posse pro firmissimo Geometriae auserim sternere fundamentum, circa quae millibus, quae passim in scholis circumferuntur argumentis, ne Achillea quidem arma resistere posse existimantur"⁸⁴, ed Hegel commenta opportunamente "Cavalieri non si cura della cattiva conseguenza che si diano infiniti maggiori e minori, conseguenza che la *scuola* trae dalla rappresentazione che gl'indivisibili costituiscono il continuo"⁸⁵.

La maggiore difficoltà rivolta all'uso fatto da Galilei e Cavalieri degli insiemi infiniti riguarda il fatto che l'infinito può essere considerato solo in potenza.

A questo riguardo Aristotele esclude che al numero ed alla grandezza si possa attribuire l'infinito attuale, ed ammette l'infinito

⁸¹ *WdL* (1832), 248-249 (277).

⁸² Cfr. Cap. I.

⁸³ a): I numeri naturali contengono i numeri naturali che sono quadrati - e sono anche in corrispondenza biunivoca con essi - (Galilei). Cfr. anche Cavalieri, nelle considerazioni tra "*transitus rectus*" e "*obliquus*". b): Cfr. i confronti tra gli indivisibili effettuati da Cavalieri.

⁸⁴ *Geometria*, VII, 2.

⁸⁵ *WdL* (1832), 306, (345).

nito potenziale per la grandezza fisica nella diminuzione e nella divisione (*καθ'αυτοῦ, διαυτοῦ*), e per il numero nell'accrescimento (*πρὸς αὐτό, ὑπὲρ αὐτό*). In particolare egli afferma che "il numero è infinito in potenza, ma non in atto; epperò sempre il numero assunto supera qualsiasi pluralità determinata"⁸⁶. Questa posizione fu condivisa da moltissimi matematici e filosofi, e continua ad esserlo anche ai nostri giorni.

Poiché vi era consapevolezza delle difficoltà coinvolte da questa critica, (le risposte alla quale diventano consistenti dopo la costruzione cantoriana della *Mengenlehre*, che legittima il numero infinito con i cardinali e gli ordinali transfiniti), sembrò necessario riferirsi dapprima in prevalenza ad aggregati i cui elementi, oltre ad essere individuabili mediante la legge caratteristica dell'insieme, fossero anche contenuti in limiti finiti: ciò costituiva un'ulteriore garanzia alla reale comprensibilità dell'insieme.

In questo senso Cavalieri, di fronte alle difficoltà provate da molti verso il concetto di tutte le linee o di tutti i piani "quasi fosse più buio delle tenebre cimmerie"⁸⁷, precisa: "Tandem verò dicta indivisibilium aggregata non ita pertractavimus ut infinita rationem, propter infinitas lineas, seu plana, subire videntur, sed quatenus finitatis quandam conditionem, & naturam sortiantur..."⁸⁸.

Queste considerazioni ci sembrano molto importanti, perché individuano un itinerario lungo il quale la considerazione degli aggregati infiniti ha avuto un ruolo di rilievo in filosofia.

Ricordiamo innanzitutto che Spinoza nell'esempio dei due cerchi sottolinea il fatto che lo spazio compreso è finito e questi segmenti in numero infinito sono compresi tra un *minimo* ed un *massimo*.

In quest'ordine di idee, avendo di mira la meditazione hegeliana sulle totalità infinite, osserviamo che Kant nella I Antinomia prende in considerazione "un tutto infinito, già dato, di cose simultaneamente esistenti"⁸⁹, considerando *il mondo* come un'infinità in atto. Una tale totalità, non ammettendo limiti, favorisce l'antinomia. A questo riguardo è però significativa l'os-

⁸⁶ *Phis.*, III (T), 7, 207 b 11-13 (riferito all'infinità del numero).

⁸⁷ *Geometria*, VII, 2.

⁸⁸ *Geometria*, VII, 2-3.

⁸⁹ *KrV*, 294, (354).

servazione di Kant (in una Nota concernente "la quantità di un *quantum* che non sia dato dentro certi limiti ad ogni intuizione"⁹⁰). "Noi possiamo intuire un *quantum* indeterminato come un tutto, se è chiuso in limiti, senza aver bisogno di costruirne con la misura, cioè con la sintesi successiva delle sue parti, la totalità. Perché i limiti determinano già la totalità, escludendo ogni di più."⁹¹

Pur non essendo esplicitato il riferimento ad una totalità infinita, non possiamo dimenticare che la geometria elementare, su cui Kant si era applicato, e di cui sosteneva la saldezza dei principi e la validità dei risultati, dimostra, ad esempio, con grande semplicità che in un segmento *AB* limitato vi sono infiniti punti. Inoltre Kant appare consapevole del fatto che in matematica, in certi casi sembrerebbero porsi confronti tra le infinità delle totalità infinite, che egli non condivide: "Ora, secondo che si assume l'unità maggiore o minore, l'infinito sarebbe maggiore o minore"⁹². Secondo Kant, invece, con il tutto infinito "non è rappresentato *quanto grande* esso sia; quindi il suo concetto non è quello di un *maximum*, ma vien pensato allora soltanto il suo rapporto a una unità presa a piacere, rispetto alla quale esso è maggiore di ogni numero"⁹³.

Di fronte a queste osservazioni importanti sul tutto infinito, da cui risulta l'interesse di Kant per la trattazione matematica di questo concetto, non vogliamo però trascurare l'importanza del rilievo che un *quantum* (pertanto anche il numero), pur essendo *indeterminato*, può risultare chiaramente intellegibile, a patto che si diano i limiti del suo campo di variabilità.

Ci siamo soffermati su questo punto anche perché Hegel, nella I Nota sull'infinito matematico, prende in considerazione la concezione kantiana del tutto infinito. Tra l'altro, commentando Kant, egli osserva che "Kant biasima che Tutti infiniti si riguardino come un massimo, come una moltitudine *completa* di date unità. Il massimo o minimo come tale appar sempre come un quanto, una moltitudine. Una tal rappresentazione non può scansare la conseguenza adottata da Kant, la quale conduce a un infinito più grande o più piccolo. In generale, immaginandosi

⁹⁰ *Ivi*, 294, (354).

⁹¹ *Ivi*, 294, (354).

⁹² *Ivi*, 298, (358).

⁹³ *Ivi*, 298, (358).

l'infinito come un quanto, vale ancora per esso la differenza di un maggiore o minore"⁹⁴. In sostanza la difficoltà prospettata è la seguente: se l'infinito è considerato compiuto, come un *quantum* con un numero preciso di unità, allora è confrontabile con altri quanti infiniti; in tal caso un infinito è maggiore di un altro; ma allora l'infinito non può essere considerato come compiuto.

Sarà Cantor a rispondere a queste difficoltà. Kant ed Hegel, ritenendo valida l'obiezione, prospettano (Kant), o indicano chiaramente (Hegel), la possibilità di ammettere moltitudini infinite di questo tipo, a patto che la loro considerazione non sia quantitativa (stabile confronto di ordinamento tra grandezze).

Si chiariscono qui ulteriormente le differenze tra la considerazione hegeliana e quella cantoriana degli insiemi infiniti. In ragione di ciò è bisogno di ricorrere a limitazioni come quelle Cantor non vi è bisogno di ricorrere a limitazioni come quelle valide per i segmenti dell'esempio di Spinoza, compresi tra un segmento minimo ed uno massimo: "Unter einer 'Menge' verestehet wir jede Zusammenfassung *M* von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten *m* unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die 'Elementen' von *M* genannt werden) zu einem Ganzen"⁹⁵. Oltre a ciò Cantor prende in considerazione i numeri infiniti, e stabilisce *ordinamenti* tra questi numeri⁹⁶.

Cantor risponde in questo modo alle difficoltà mosse dalla "scuola", e prima ancora da Aristotele, contro l'assunzione delle moltitudini infinite in atto e del numero infinito. Alle stesse difficoltà risponde Hegel, adeguandosi in parte al punto di vista di Kant: nel confronto tra totalità infinite in atto "non vien fuori l'assurdo di un infinito più grande o più piccolo; perché questo quanto dell'insieme non ha che fare col rapporto dei suoi elementi, *colla natura della cosa*, cioè colla determinazione qualitativa della grandezza"⁹⁷. L'infinità si deve far consistere in una determinazione qualitativa della grandezza, e non quantitativa. Osserviamo che in Kant l'infinità di un tutto infinito consiste nel rapporto (*Verhältnis*) tra il tutto ed un'unità presa a piacere, "ri-

⁹⁴ *WdL* (1832), 240 (268).

⁹⁵ CANTOR, *Abhandlungen* cit., p. 282.

⁹⁶ Cf. CANTOR, *Abhandlungen* cit., pp. 296 segg. Si veda MONK, *Introduction* cit., Cap. 2; LIPSCHUTZ, *Set Theory* cit., Cap. 11.

⁹⁷ *WdL* (1832), 248, (277). Hegel stabilisce qui un'analogia tra la somma di una serie ed il suo sviluppo, e la grandezza dello spazio tra i due circoli ed i segmenti in esso compresi.

spetto alla quale esso è maggiore di ogni numero"⁹⁸, in questo modo tutti infiniti diversi hanno la stessa infinità: "l'infinità, consistendo semplicemente nel rapporto a questa unità data, rimarrebbe sempre la stessa"⁹⁹. Invece la determinatezza qualitativa dell'infinità non esclude la possibilità di confronti tra gli infiniti, come accade, ad esempio, per le funzioni (anche se non si possono stabilire ordinamenti, poiché rientrano nella sfera quantitativa).

Anche in Hegel la considerazione di insiemi infiniti "limitati" permetteva di rispondere alle accuse di assoluta indeterminatezza del numero degli elementi di tali insiemi. Così, commentando l'esempio di Spinoza, Hegel rileva chiaramente l'importanza della condizione di limitatezza dello spazio tra i due cerchi: "questo spazio è uno spazio limitato"¹⁰⁰. Egli ha del pari consapevolezza che Cavalieri non vuol confrontare il numero degli elementi dei suoi aggregati, "ma soltanto la *grandezza*, cioè la determinatezza quantitativa come tale, che è uguale allo spazio occupato da queste linee"¹⁰¹, e considera le infinite linee "in quanto hanno in loro una *determinata costituzione e natura di limitatezza*"¹⁰².

La considerazione dell'opera geometrica di Cavalieri sugli indivisibili, congiunta con la meditazione della riflessione di Spinoza e di Kant, favorisce pertanto l'approfondimento dello studio sul concetto di *vero infinito*, partendo dalla considerazione delle totalità infinite limitate.

7. Conclusione.

Non sarà superfluo tener presente che la connessione del pensiero di Cavalieri, Spinoza, Kant, del concetto matematico di funzione, risulta direttamente dalla *Wissenschaft der Logik* del 1831 (e, con l'eccezione di Cavalieri, sin dall'edizione del 1812, dove al Gesuato è dedicata una breve citazione¹⁰³). Infatti, com-

⁹⁸ *KrV*, 298, (358).

⁹⁹ *Ist*, 298, (358).

¹⁰⁰ *WdL* (1832), 248 (276).

¹⁰¹ *Ist*, 305 (344-345).

¹⁰² *Ist*, 306 (345).

¹⁰³ *WdL* (1812-13), 166.

mentando nella I Nota l'esempio di Spinoza, in cui si pone il problema del rapporto tra un quanto continuo (la superficie tra i due cerchi) ed un quanto, a confronto del primo, discreto (un segmento), Hegel afferma esplicitamente: "si spiegherà poi più avanti in una nota in qual modo in generale l'opposizione del quanto continuo e del quanto discreto conduce all'infinito"¹⁰⁴. Si tratta appunto della III Nota sull'infinito matematico, dedicata soprattutto (e con particolare riguardo a Cavalieri) al rapporto tra il continuo ed il discreto.

Per ciò che riguarda il problema della misura dei continui, che rientra nel più vasto problema dell'*integrazione*, abbiamo visto che l'interesse di Hegel non è rivolto a particolari meriti tecnici, o alla organizzazione sistematica della materia, che pure sono aspetti importanti dell'opera di Cavalieri. Hegel apprezza piuttosto la "purezza", del metodo (così come apprezza la *Théorie des fonctions analytiques* di Lagrange), che non introduce le grandezze infinitesime accanto a quelle ordinarie, né vuol ottenere la misura del continuo come somma di infiniti infinitesimi: Cavalieri infatti determina il rapporto tra i continui in base al rapporto degli indivisibili dei due continui (rapporto opportunamente precisato).

Oltre che al problema della misura, l'attenzione di Hegel è rivolta alla concezione dell'infinito, e del rapporto tra il continuo ed il discreto. Questi temi vengono trattati dal Gesuato con grande finezza, ed effettivamente toccano uno dei punti più alti della speculazione matematico-filosofica sull'infinito, prima dell'opera di G. Cantor. Con felice intuizione Hegel collega questa meditazione sull'infinito con quella di Spinoza e di Kant, e con quella dei matematici sul concetto di funzione elaborato da Leibniz, Bernoulli, Eulero, Lagrange, etc.

Al centro di questa riflessione sta la possibilità di dare esemplificazioni del *vero infinito* nella sfera della quantità. Hegel accoglie il punto di vista spinoziano: si può rilevare mediante esempi matematici che l'infinito può essere considerato *actu*.

Riferendoci alle moltitudini (aggregati), vi sono almeno due modi di intendere un'infinità in atto: 1) gli elementi sono dati tutti nella loro individualità specifica, e la loro "riunione" (il loro accostamento) dà la moltitudine (gli elementi sono le parti, e la

¹⁰⁴ *WdL* (1832), 248 (276).

loro riunione dà l'aggregato). Come vedremo è la posizione di Bayle, che Hegel non condivide; 2) questi infiniti elementi non sono dati *tutti* nella loro individualità, ma è data la possibilità di ottenerne sempre di nuovi (condizione di infinità potenziale); però si riesce a "confinare" questi elementi tutti in modo ben preciso (come nell'esempio di Spinoza). In breve: gli elementi sono infiniti da un punto di vista potenziale, ma vi è un ente (che nei primi esempi è geometrico e limitato), uno ed intero (= non-composito) al quale essi appartengono tutti.

Queste considerazioni emergono a nostro avviso anche dalla conclusione dell'analisi dell'antinomia tra la continuità e la discrezione. Secondo Hegel quest'antinomia kantiana consiste nel considerare i momenti della continuità e discrezione "come assolutamente separati" ¹⁰⁵, mentre essi devono venir considerati solo nella loro unità.

Sotto questo profilo Hegel trova "infinitamente più significativi e più fecondi" gli esempi dialettici dell'antica scuola eleatica ¹⁰⁶, e "le soluzioni che Aristotele dà di queste figure dialettiche, sono altamente da pregiare, e son contenute nei suoi concetti veramente speculativi dello spazio, del tempo e del moto. Poiché le più famose di coteste dimostrazioni si basano sulla infinita divisibilità (mentre questa, essendo immaginata come effettuata, è lo stesso che l'essere infinitamente diviso, ossiano gli atomi), Aristotele contrappone alla divisibilità la continuità, che si attaglia così al tempo come allo spazio, per modo che la pluralità infinita, cioè astratta, risulta contenuta nella continuità soltanto *in sé*, secondo la possibilità" ¹⁰⁷.

Bayle, nel suo *Dictionnaire* (articolo *Zenon*) reputa "pitoyabile" la soluzione di Aristotele alla dialettica di Zenone, ed osserva che "se la materia è divisibile all'infinito, contiene *realmente* una quantità infinita di parti, cosicché questo non è un infinito 'en puissance', ma un infinito che esiste realmente e attualmente" ¹⁰⁸.

¹⁰⁵ *Ist.*, 187 (210).

¹⁰⁶ *Ist.*, 187 (211).

¹⁰⁷ *Ist.*, 188 (212). Sull'interpretazione di Aristotele dei "paradossi" di Zenone, cfr. ARISTOTELE, *Phys.*, VI (Z), 239b5-240b7. Sul concetto aristotelico di continuità cfr. ARISTOTELE, *Phys.*, V (E), 226b18-227b2. Sulla problematica dei paradossi di Zenone rinviamo all'articolo, di prossima pubblicazione, L. TOTI, *I paradossi di Zenone nel "Parmenide" di Platone*.

¹⁰⁸ *Ist.*, 188 (212). Cfr. P. BAYLE, *Dictionnaire historique et critique*, cinquième

Hegel non concorda con questa critica, ed osserva: "già la *divisibilità* stessa è solo una possibilità, non un *esistere delle parti*, e la pluralità in generale è posta nella continuità solo come un momento, come un che di tolto" ¹⁰⁹; nella *molitudine infinita* delle parti, le parti sono delle "astrazioni", degli "entia rationis", e non devono essere prese "per qualcosa, per un che di vero e reale" ¹¹⁰.

Queste conclusioni sono estremamente importanti, come si vede, non solo per il rapporto tra continuo e discreto, ma anche per comprendere come vada inteso, secondo Hegel, il vero infinito.

Tenendo presenti le varie osservazioni di Hegel sull'infinità vera della moltitudine, possiamo dire innanzitutto che esse corrispondono al punto di vista inderogabile, secondo il quale il tutto è prioritario rispetto alla parte: la riunione delle parti (infinite o no) dà solo un aggregato (inteso in senso deterioro, e non con la connotazione *unitaria* che troviamo in Cavalieri). Gli elementi infiniti per numero possono dar luogo soltanto ad infinità potenziali.

Ma l'infinità in atto implica un'ulteriore operazione di *com-prensione* di questi elementi in un intero, nuovo e non omogeneo rispetto a questi. Il cammino che congiunge idealmente Cavalieri, Spinoza, Kant ed Hegel rappresenta un itinerario di enorme importanza per la storia delle idee. Con questi (ed altri) autori la riflessione sulla filosofia della matematica superava le restrizioni aristoteliche sul concetto di infinito, favorendo la successiva formazione di un concetto di insieme infinito che gode della proprietà di *indivisibilità* "in senso debole" (l'insieme è uno nella sua interezza, indipendentemente dalla molteplicità dei suoi elementi) ¹¹¹. Questa è una premessa perché l'insieme possa a sua volta essere elemento di altri insiemi (= "godere di attributi"): è l'*indivisibilità* precisata da Casari (la quale non ci sembra risulti dalle considerazioni di Hegel sulla matematica).

Il confronto con Cavalieri serve pertanto ad Hegel non solo

edition, revue, corrigée, et augmentée, Amsterdam, Leide, La Haye, Utrecht; MDCCXLI, Tome quatrième. Q-Z. Article: *Zenon*, pp. 536-549.

¹⁰⁹ *Ist.*, 188 (212).

¹¹⁰ *Ist.*, 188-189 (212).

¹¹¹ Cfr. L. LOMBARDO-RADICE, *Istituzioni di algebra astratta*, Milano 1977, p. 10, Nota n. 9.

per estendere l'esame critico dell'analisi infinitesimale, ma anche per approfondire e rinsaldare il suo punto di vista sul rapporto tra il continuo ed il discreto, e, in un piano più astratto, sul concetto stesso di infinito.

CONCLUSIONE

Le tematiche svolte nei precedenti capitoli suggeriscono almeno quattro ordini di considerazioni.

1) Sotto il profilo della filosofia della scienza riteniamo molto interessanti le considerazioni di Hegel sulla matematica come scienza dell'intelletto. Secondo Hegel la matematica ha una sua ben precisa struttura come scienza, legata anche alla logica che presiede alla sua costituzione, che è la logica dell'intelletto. La matematica superiore intuisce anche determinazioni concettuali, la qual cosa rappresenta già di per sé un fatto di estrema rilevanza filosofica, che va opportunamente meditato. Se la matematica superiore vuol passare dall'intuizione alla rappresentazione ed alla trattazione *razionale* di queste determinazioni, allora essa non è più matematica, ma filosofia. Se invece vuol rappresentare e trattare queste determinazioni conformemente al suo canone, nello stesso momento in cui le prende in considerazione si porta dal piano dell'intuizione del concetto a quello della sua rappresentazione formale, e quanto più acquista sotto quest'ultimo profilo, tanto più perde nella "intensione" concettuale.

Anche quest'ultimo fatto però non è soltanto negativo. Infatti le critiche all'inadeguatezza del metodo matematico al concetto (tema sviluppato in tutte e tre le Note) rappresentano un aspetto dell'indagine hegeliana sui *limiti* della scienza dell'intelletto, oltrepassati i quali essa si avviluppa in situazioni contraddittorie, che possono venir risolte solo dalla *ragione*.

Non solo. Anche a livello del *Verstand* la matematica giunge

a risultati degni del più grande interesse anche per la filosofia, che riesce a vedere con maggior chiarezza il campo di applicazione corretta della logica dell'intelletto. Infatti, seguendo la proposta di Lagrange, essa riesce a costruire un "calcolo delle funzioni", legato alla fondamentale operazione di determinazione della derivata di una funzione (e dell'operazione inversa, di determinazione delle funzioni primitive di una funzione data). Queste operazioni si rivelano di grandissima generalità, e permettono una soluzione "analitica" dei problemi geometrici di determinazione della tangente, dell'area di una superficie, ecc.

Questo apprezzamento della matematica nel suo procedere come scienza del *Verstand* è a nostro avviso molto importante, perché ci fa capire che le osservazioni a volte severamente critiche di Hegel nei riguardi della matematica (ad esempio nella *Phänomenologie*) non devono essere fatte valere assolutamente, ma vanno rapportate alla funzione che esse hanno nel luogo in cui esse sono enunciate, di evidenziare l'insufficienza di una conoscenza esclusivamente intellettualistica. Una volta di più, se ce ne fosse bisogno, non appare sostenibile l'affermazione sovente espressa dalla critica, che il pensiero di Hegel si pone in netta antitesi con il pensiero matematico.

II) La redazione del 1831 della "dottrina dell'essere" evidenzia ancora una volta il grande interesse di Hegel per lo status della scienza matematica del suo tempo, e documenta l'intenzione di avvicinarsi sempre più alla sistemazione legata alle proposte più recenti. Questo fatto è rilevante anche sotto il profilo della storia della scienza.

Quanto abbiamo detto viene documentato non solo dalla grande attenzione dedicata a Lagrange, ma anche dal suo interesse verso le proposte di fondazione dell'analisi con il metodo dei limiti, secondo l'impostazione di Lacroix, e tenendo conto anche (tramite l'articolo di Dirksen) della proposta di Cauchy.

Hegel trova che il concetto di limite non è ancora fondato con rigore, allo stesso modo che non lo è la *somma* di una serie, la qual cosa rende inaccettabile l'eguaglianza della somma con il suo sviluppo infinito. E queste osservazioni corrispondono all'effettiva situazione della matematica dell'epoca.

Molto importante è altresì il riconoscimento dell'importanza del concetto di relazione-funzione matematica, particolarmente evidenziato nella *Scienza della logica*.

La relazione matematica viene trattata nella sezione "Quantità", ed è il punto di partenza della "teoria della misura" (categoria che, secondo Hegel, presenta aspetti sia della relazione, che della modalità, limitatamente alla loro considerazione nella sfera dell'essere). Alla relazione matematica vengono dedicate in modo particolare le due prime note sull'infinito matematico, e lo stesso capitolo conclusivo della "quantità". "Il rapporto quantitativo (Das quantitative Verhältnis)", prende in considerazione particolari relazioni: la *relazione diretta*, la *relazione inversa* e la *relazione potenziale*¹. Nella teoria della misura le relazioni quantitative trovano applicazione nella determinazione delle leggi della natura per quel che riguarda le funzioni-relazioni continue (cui seguirà, come abbiamo già accennato altrove, l'esame del problema della discontinuità con riferimento alle leggi della natura). La relazione matematica, come viene trattata nelle pagine dedicate all'infinità del quanto, è pertanto la base su cui si organizza il percorso logico successivo alle categorie "matematiche" della qualità e della quantità.

Possiamo dire che nel suo significato più generale Hegel considera la relazione/funzione come un legame tra una variabile ed un'altra, o tra più variabili, suscettibile di infinite determinazioni, conformemente al concetto matematico di relazione/funzione. Il ruolo svolto da questo concetto nella logica di Hegel mostra che egli prende atto dell'importanza della relazione matematica. Questa nozione infatti, già implicita nelle considerazioni della geometria greca prima, e di quella cartesiana poi, sui luoghi geometrici, si andava esplicitando nelle successive considerazioni dei matematici sulla geometria analitica e sull'analisi matematica, e trovava applicazioni sempre più frequenti, nella fisica e nelle altre scienze naturali, per esprimere le leggi della natura.

Tra l'altro Hegel si rende conto del fatto che le relazioni tra grandezze appartengono ad una matematica *qualitativa*. Nella *Logica di Jena* egli rileva infatti che i numeri "sono per sé puri quanti, ma nella loro relazione reciproca sono posti in modo qualitativo"², e questa consapevolezza vien ribadita nella *Scienza della Logica*, in cui tra l'altro egli precisa che nella relazione il quanto non ha "una determinazione indifferente, ma qualitativa".

¹ Cfr. WdL (1832), 310 sgg. (350 sgg.).

² *Jenaer Systementwürfe II* cit., 22 (25).

va"³. In realtà la matematica, con i concetti relazionali, si affrancava sempre più dalla definizione riduttiva di "scienza della quantità", e si presentava sempre più come scienza della relazione e della qualità. Questo fatto veniva constatato con chiarezza soprattutto da Leibniz. Un simile convincimento si andava facendo strada tra diversi matematici, anche se lentamente. L'essersi reso conto di ciò costituisce indubbiamente un grande merito di Hegel.

III) Le tre Note sull'infinito della *Scienza della logica* dell'edizione 1832 confermano nelle linee generali il contenuto di quella del 1812. Le tre Note non sono un *excursus* sull'analisi superiore fine a se stesso, ma rappresentano una meditazione sulla struttura stessa della logica, in particolare della dottrina dell'essere.

Con questa riflessione sull'analisi superiore, nella configurazione da essa assunta tra la fine del Settecento ed i primi anni dell'Ottocento, Hegel ha modo, di rispondere ad alcune importanti questioni filosofiche, che hanno origine già nella prima filosofia greca: il problema dell'infinito, del limite, della discretezza, della continuità, del movimento e del divenire.

Hegel ritiene che la soluzione di questi problemi possa venire trovata nella rilettura della filosofia classica mediata dalla riflessione di alcuni temi della filosofia e della matematica moderna (ad es. il concetto di *tutto infinito*, di *funzione*, di *aggregato* secondo Cavalieri, ecc.).

In particolar modo la dialettica *cattivo infinito*, *limite*, *vero infinito*, che nella matematica trova come corrispondenti le nozioni di *serie infinita*, *legge-limite*, *concetti insiemistici e relazionali*, riflette lo schema platonico del *Filebo*, sui primi tre generi dell'essere: *infinito*, *limite*, *genere misto*. E le considerazioni hegeliane sulla contraddizione insita nel movimento e nel divenire, e presente nelle proposte dei matematici sugli evanescenti/infinitesimi, riflettono il contenuto di quelle di Platone nel *Parmenide*, sulla natura dell'*istante*.

In questo modo Hegel dà una risposta anche al nucleo della prima antinomia della *Critica della ragion pura*, che riguarda "la limitatezza o illimitatezza del mondo nel tempo e nello spazio"⁴, e

³ *WdL* (1832), 236 (264).

⁴ *Ist.*, 228 (256).

nella quale "il limite quantitativo ... vien considerato nel suo contrasto"⁵. Secondo Hegel "la tesi e l'antitesi e le loro dimostrazioni non lasciano quindi vedere altro che le affermazioni opposte, che v'è un *limite*, e che il limite è in pari tempo solo un *limite tolto*"⁶. Lasciando da parte le implicazioni dovute al concetto di una totalità speciale, quale "il mondo", siamo di fronte anche in questo caso, come rileva Hegel, alla contraddizione tra il non limitato ed il limite, la cui soluzione è costituita dal *vero infinito*.

Esaminando il punto di vista di Cavalieri sugli *aggregati infiniti* Hegel prende in considerazione, ricollegandosi alla prima Nota, il problema della determinazione della molteplicità infinita, e quello del rapporto discreto-continuo. Emerge anche in questo caso la necessità di "limitare" la totalità degli elementi di una molteplicità infinita. Si precisa anche il senso in cui la molteplicitudine è *attualmente* (*actu*) *infinita*: essa lo è come *totalità*, invece i singoli elementi sono infiniti solo *in potenza*. In questo modo è possibile una conciliazione tra il pensiero di Platone e quello di Aristotele sull'infinito, nelle risposte che essi danno ai paradossi di Zenone relativi alla considerazione delle molteplicità infinite. Le conseguenze di questo fatto si estendono anche al rapporto tra continuità e discretezza, oggetto della seconda Antinomia della *Critica della ragion pura*, e confermano la soluzione data a questo problema da Aristotele, il quale "contrappone alla divisibilità la continuità ... per modo che la pluralità infinita, cioè astratta, risulta contenuta nella continuità soltanto in sé, secondo la possibilità"⁷.

IV) Abbiamo già rilevato, sia in questo lavoro, sia in precedenza, che talora le considerazioni hegeliane sulla matematica non sono felici. Ad esempio: a) egli attribuisce a Newton l'affermazione che nell'ultima ragione gli evanescenti sono eguali; b) nelle considerazioni sul "calcolo delle funzioni" egli sopravvaluta il ruolo dell'applicazione della teoria rispetto alla teoria stessa; c) egli vuole inoltre limitare la classe delle funzioni a quelle esprimibili mediante equazioni razionali intere di grado maggiore o

⁵ *Ist.*, 228 (256).

⁶ *Ist.*, 232 (260).

⁷ *Ist.*, 188 (212).

eguale a 2 (risentendo in questo della sua concezione filosofica del numero e delle potenze).

Questi fatti vanno segnalati, però essi non incidono sulla rilevanza della riflessione di Hegel sulla matematica. Vi sono inoltre degli aspetti molto positivi, che trovano singolari riscontri in alcuni importanti sviluppi del pensiero logico-matematico: tra questi ricordiamo 1) il punto di vista cantoriano sul concetto di insieme; 2) le logiche temporali con contraddizione (von Wright).

Abbiamo già notato l'affinità del punto di vista di Cantor sull'insieme infinito con quello di Hegel sul vero infinito (prescindendo naturalmente dagli sviluppi della teoria dei numeri transfiniti cardinali, ordinali, ecc., e limitandoci al "concetto" di insieme). Questa affinità si rivela ancor più profonda in quanto entrambi i pensatori si rivolgono come modello al *Filebo* platonico.

Non sarà infatti inutile ricordare che Georg Cantor riteneva, con profonda intuizione e sensibilità filosofica, di aver riproposto con il suo concetto di insieme, il "terzo genere" del *Filebo* platonico. Egli afferma infatti: "per 'varietà' o 'insieme' io intendo propriamente in generale ogni Molti, che si lascia pensare come uno, ossia ogni aggregato di elementi determinati, che può venir legato in un tutto mediante una legge, e credo di definire con ciò qualcosa di affine all' $\epsilon\iota\delta\omicron\varsigma$ o $\iota\delta\acute{\epsilon}\alpha$ *platonici*, così come a quello che *Platone* nel suo dialogo *'Filebo'* o il sommo bene' chiama $\mu\upsilon\kappa\tau\omicron\nu$ Egli oppone questo all' $\acute{\alpha}\rho\epsilon\tau\epsilon\iota\omicron\nu$, ossia al non-limitato, indeterminato, che io chiamo infinito-improprio, così come al $\tau\acute{\epsilon}\rho\omicron\varsigma$ ossia al limite, e lo chiama come una ordinata 'commissione' dei due ultimi"⁸.

Pur con le opportune cautele, d'altra parte già segnalate, nel proporre corrispondenze tra il pensiero di Hegel e quello di Cantor — tra l'altro il concetto cantoriano di insieme si applica anche alle moltitudini finite, ed in Hegel non troviamo una trattazione analoga, di pari generalità, con l'eccezione dell'intuizione del concetto di "sistema di momenti" — riteniamo in ogni caso significativo dell'affinità dei loro punti di vista sull'infinito il fatto che entrambi sentano la necessità di richiamarsi al *Filebo* platonico per comprendere correttamente il rapporto tra l' $\acute{\alpha}\rho\epsilon\tau\epsilon\iota\omicron\nu$ ed il $\tau\acute{\epsilon}\rho\omicron\varsigma$.

⁸ CANTOR, *Abhandlungen* cit., p. 204.

Lo stesso discorso hegeliano sulla contraddizione trova riscontro in prospettive di pensiero contemporanee.

È indubbio che il calcolo infinitesimale ha cercato dopo Leibniz e Newton, altre strade, in cui non vi fosse il ricorso alla contraddizione. Questo accade sia nell'analisi classica, nella sua costituzione finale, in cui si evita il concetto di grandezza infinitesima attuale, sia nell'analisi non-standard dei nostri giorni, in cui si ripropongono le grandezze infinitesime in atto ricorrendo ad uno strumento logico alquanto evoluto e sofisticato.

Ciò non toglie però che in tempi recenti l'interesse per teorie logiche in cui è ammissibile la contraddizione si sia fatto nuovamente sentire, non solo con suggestioni, ma anche con proposte alquanto interessanti. Riteniamo necessario dare qualche ragguglio su questo aspetto della questione, non tanto per interpretare Hegel alla luce di queste ricerche contemporanee, quanto per mostrare anche in questo caso l'attualità del suo punto di vista speculativo.

Infatti anche per il "problema del cambiamento" e dell' "istante", come già si è visto per la considerazione della moltitudine infinita in atto, il punto di vista di Hegel, riguardante la contraddittorietà del mutamento, è stato riproposto in logica. Il primo approccio verso una logica temporale senza atomi di tempo e con contraddizioni è stato avanzato da G.H. v. Wright, con il saggio *Time, Change and Contradiction*, in cui descrive una teoria "di quella che Prior ha chiamato ... *temporal fuzziness*, che con un po' di approssimazione si può tradurre 'evanescenza temporale'. Assunta la non-discretezza dell'ordine temporale, si ha un '*fuzz*' quando tra due istanti a cui è vera *p* è vera *non p* e viceversa". Una volta stabilita secondo la proposta di von Wright la caratterizzazione univoca di "occasioni" di tempo, "in caso di evanescenza si può dividere a piacere in parti sempre più piccole l'occasione in questione, la quale resterà sempre caratterizzata da $M(p \text{ et non } p)$ "⁹.

⁹ C. PIZZI, *Introduzione*, in *La logica del tempo*, a cura di C. PIZZI, Torino 1974, pp. 82-83. Si veda G.H. VON WRIGHT, *Time, Change and Contradiction*, Cambridge 1969, pp. 1-32, in italiano *Tempo, cambiamento e contraddizione*, trad. di C. Pizzi, in *La logica del tempo* cit., pp. 256-279. Nel testo citato abbiamo modificato la notazione logica. M rappresenta l'operatore modale di possibilità.

Sulla "logica del cambiamento" si sono espressi vari studiosi (ricordiamo Prior, Clifford, Hamblin) con diversi punti di vista, che d'altra parte testimoniano l'inter-

Von Wright, si rende conto del legame che sussiste tra la sua proposta logica e la logica dialettica. Infatti egli rileva: "abbiamo stabilito un legame tra ciò che propongo di chiamare *la grande tradizione logica* ... e un'altra tradizione, minore ma non priva di influenza, che muove principalmente da Hegel", ed osserva che la logica di Hegel "contiene idee e osservazioni che presentano un autentico interesse per un logico tradizionale, e la cui analisi può portare a nuovi sviluppi in materia". E conclude con questo esplicito augurio: "Non è escluso che queste ricerche possano anche promuovere un ravvicinamento tra orientamenti della filosofia contemporanea che finora si sono duramente scontrati e profondamente allontanati fra di loro" ¹⁰.

Queste considerazioni sul concetto di insieme, di relazione, e sulle logiche con contraddizione, mostrano che Hegel non si era posto in un vicolo cieco con il punto di vista da lui assunto nella logica, dal momento che la stessa matematica e la logica o avevano già espresso le posizioni di pensiero fatte proprie da Hegel, (concetto di relazione), o si sarebbero ispirate alle stesse fonti speculative (Platone) per trovare l'interpretazione filosofica dei loro punti di vista (concetto di insieme infinito), o avrebbero riconosciuto (logiche temporali con contraddizione) la possibilità di riabilitare il ruolo logico della contraddizione.

se suscitato dalla proposta di von Wright. Dal canto suo Dalla Chiara Scabia prospetta la possibilità che all'interno di un "tempuscolo" Δ , 'sufficientemente breve' si dia un *mutamento* (passaggio da α a $\text{non } \alpha$), in modo da individuare all'interno del tempuscolo "una zona" ('infinitesima' rispetto all'ordine di grandezza delle soglie temporali considerate) in cui valga simultaneamente α e $\text{non } \alpha$ e tale che non sia ulteriormente suddivisibile in due zone in cui valga definitivamente α e $\text{non } \alpha$. Il mutamento viene così interpretato mediante una contraddizione che ha luogo in una zona infinitesima all'interno di un tempuscolo: M.L. DALLA CHIARA SCABIA, *Logica*, Milano 1974, pp. 87-88 (abbiamo modificato la notazione logica).

¹⁰ VON WRIGHT, *Tempo, cambiamento e contraddizione* cit., p. 279.

INDICE DEI NOMI

- | | |
|---|--|
| Abel N.H., 11 | Castelli B., 80 |
| Achille, 88 | Cauchy A.L., 10, 11, 22, 39, 40, 41, 48, 49, 98 |
| Archimede, 67 | Cavalieri B., 12, 13, 27, 29, 63-66, 68-69, 92, 93, 95, 100, 101 |
| Aristotele, 18, 29, 78, 87, 88, 91, 94, 95, 101 | Cerulli A., 8 |
| Bardili C.G., 50 | Cesa C., 16 |
| Barile A., 8 | Chierieghin F., 8, 10, 15, 25 |
| Barrow I., 75 | Cifoletti G., 10 |
| Bayle P., 29, 94 | Clifford J., 103 |
| Berkeley G., 31 | Cohen P.J., 86 |
| Bernoulli J., 22, 93 | Croce B., 16 |
| Biasutti F., 7, 25 | Cusano N., 79 |
| Bignami L., 25 | |
| Bodet R., 10, 25 | D'Alembert J.-B. le R., 40, 50 |
| Bolzano B., 66, 67 | Dalla Chiara Scabia M.L., 104 |
| Bonsiepen W., 64 | Dedekind R., 66, 67 |
| Bortazzini U., 23, 55 | Descartes R., 57, 58, 83, 99 |
| Bourbaki N., 86 | Dirksen E.H., 40, 49, 50, 98 |
| Boyer C.B., 69 | Düsing K., 25 |
| Bradwardine T., 77 | Dupont P., 55 |
| Bruno G., 79 | |
| | Eschenmayer K.A., 50 |
| | Euler L., 11, 22, 23, 39, 41, 43, 48, 55, 63, 93 |
| Canale L., 8 | |
| Cantor G., 66, 67, 85, 86, 89, 91, 93, 102 | Faggiotto P., 7 |
| Carnot L.N.M., 44, 50 | Filebo, 12, 16, 23-29, 34, 36, 100, 102 |
| Cartesio R.: v. Descartes R. | |
| Carugo A., 65, 77 | |
| Casari E., 86, 95 | |

- Fleckenstein J.O., 10, 64, 77
 Fleischacker L.E., 10
 Fraenkel A., 67
 Fraser A.C., 31
- Gadamer H.-G., 25, 64
 Gaiarsa A., 25
 Galliet G., 65, 74, 75, 77, 78, 80, 81, 84, 86, 88
 Galuzzi M., 10
 Garniron P., 23
 Gebhardt C., 20, 87
 Gentile G., 26
 Gerhardt C.L., 31
 Gesuati, 65
 Gesuato: v. Cavalieri
 Gesuiti, 65
 Geymonat L., 65
 Giacin M., 25
 Gindulus Uslup: v. Guldinus Paulus
- Giusti E., 64, 65, 77, 79
 Glockner H., 68
 Gordio, 72
 Gregorius a S.to Vincentio, 69
 Guerraggio A., 10
 Guldinus P., 80, 87
- Hamblin C.L., 103
 Hammer F., 67
 Hegel-Archiv, 7, 40
 Heine E., 39
 Hoffmeister J., 73
 Hoste V., 10
 Hogemann F., 9
 Horsley S., 31
 Horstmann R.-P., 12, 25, 40
 Hotho H.G., 24
- Internationale Hegel-Vereinigung, 12
 Istituto Italiano per gli Studi Filosofici, 7, 12
- Jaeschke W., 9, 23, 24
- Kant I., 25, 26, 29, 33, 84, 85, 89-95
 Kepler J., 67

- König G., 7
 Kowalewski G., 41
 Krazar A., 41
 Kunne W., 25
- Lacroix S.F., 11, 22, 40, 41, 48, 63, 98
 Lagrange J.L., 11, 13, 22, 37, 38, 40, 44, 45, 47-50, 53, 55-60, 63, 69, 76, 93, 98
 Lasswitz K., 77
 Leibniz G.W., 11, 12, 22, 30, 31, 40, 42, 43, 45, 46, 48, 53, 63, 64, 67, 70, 93, 100, 103
 L'Hospital (de) G.F.A., 31
 L'Huillier S., 11, 40
 Lipschutz S., 86, 91
 Lombardo-Radice G., 26
 Lombardo-Radice L., 24, 64-66, 76, 79, 87, 95
 Longato F., 25
 Loria G., 81
 Lure S. Ja., 79
- Magistrini G.B., 44
 Marconi D., 48
 Marotta G., 7
 Marsili G., 80
 Mathieu V., 26
 Mengoni F., 25
 Merker N., 16
 Michel K.M., 23
 Moldenhauer E., 23
 Moni A., 9, 59
 Monk D., 86, 91
 Moretto A., 9, 25, 53
 Moretto F., 8
- Neo-pitagorico, 79, 83
 Newton I., 11, 12, 30, 31, 33, 40, 44, 48, 49, 63, 64, 67, 68, 70, 77, 83-85, 101, 103
 Nicolin F., 16
- Parmenide, 12, 16, 24, 25, 30, 34-36, 94, 100
 Pascal B., 65
 Petaro G., 8
 Petin Rossi G., 25
- Peripatetici, 79
 Petty M.J., 7, 12, 40
 Pianta G., 8
 Pitagora, 47
 Pitagorici, 79
 Pizzi C., 103
 Platone, 23-30, 34-36, 94, 100-102, 104
 Poëgeler O., 16
 Pithonsky F., 67
 Prior A.N., 103
- Rampazzo G., 8
 Rehm M., 10
 Reinhold K.L., 50
 Roberval (de) G.P., 65, 83
 Robinson A., 31
 Roseleat (van) B., 67
 Rosenkranz K., 25, 26
 Rudio F., 41
 Russo A., 19
- Salvati, 78
 Schelling F.W.J., 50
 Scriba C.J., 69
 Serret J.-A., 38
 Simplicio, 79
 Socrate, 28, 29
 Spchr F.W., 40, 49
 Spinoza B., 20-24, 27-30, 52, 85, 87-89, 91-95
- Staeckel P., 41
 Stiftung Volkswagenwerk, 7
- Tacquet A., 74, 75
 Taylor B., 56
 Toraldo di Francia G., 10
 Torricelli E., 65, 74, 80, 81, 83
 Toth L., 7, 10, 94
 Trede J.H., 25
- Unione Matematica Italiana, 64
- Vardy P., 10
 Vassura G., 81
 Verra V., 10
 Vieillard-Baron J.-L., 25
 Viviani L., 8
 Vinta B., 77
- Walls J., 65, 69
 Weierstrass K., 23, 39, 55
 Whewell W., 75
 Wolff C., 43
 Wolff M., 10, 40
 Wright (von) G.H., 102-104
- Zadroz A., 27, 29
 Zenone, 7, 19, 94, 95, 101
 Zermelo E., 67

ib innsup

ib innsup

ib innsup

ib innsup

ib innsup

ib innsup



Finito di stampare nel mese di giugno 1988
da La Grafica & Stampa editrice s.r.l. di Vicenza
Composto con caratteri Garamond
dalla Linotipia Saccuman s.n.c. di Vicenza
Confezionato dalla Legatoria Laghetto

584124 8